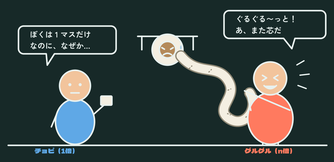
数値シミュレーション検証レポート

トイレットペーパー交換当番問題



「最後に使った人が交換する」ルールで、トイレに行く回数は同じ、1回に使う量だけが n 倍違う二人がいるとき、交換係はどちらに偏るのか。モンテカルロで確かめました。

結論

グルグルが n 倍

交換回数の比は 1 : n、シェアは n/(1+n)

n = 2 のとき

66.9%

理論値 66.7%（約 1.26 万ロールで検証）

ルール設定

シミュレーションの家庭内ルール

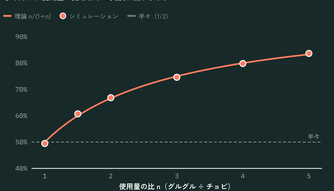
1. ロールの長さは **L**（チョビの1回分を 1 とする単位で L = 237.3）。端数が出ると、使用量の整数倍にはしていません。
2. トイレに行くのは毎回 1/2 の確率でどちらか。長期的に**回数は同じ**です。
3. 1回の使用量は **チョビ** 1、**グルグル** n。
4. 使っている途中でロールが尽きた人が交換し、足りない分は新しいロールから使います。

各条件で 200 万回のトイレ利用（n = 2 で約 1.26 万ロール分）を生成しました。乱数は NumPy PCG64、シード固定です。

結果 1

グルグルの交換シェアは n/(1+n)

点がシミュレーション、線が理論値 n/(1+n) です。n = 1 以外はどれも「半々」の点線から大きく外れ、使用量の比どおりに交換が偏ります。

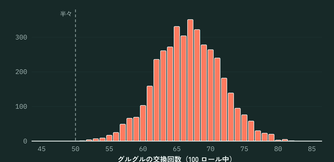


n	交換したロール数	グルグルのシェア	理論 n/(1+n)	交換回数の比
1	8,428	49.5%	50.0%	1 : 0.98
1.5	10,536	60.7%	60.0%	1 : 1.55
2	12,646	66.9%	66.7%	1 : 2.02
3	16,858	74.6%	75.0%	1 : 2.94
4	21,060	79.8%	80.0%	1 : 3.96
5	25,266	83.7%	83.3%	1 : 5.13

結果 2

100 ロール使ったら、何回替える？

n = 2 の家庭を 4,000 軒つくり、それぞれ 100 ロール分の交換を数えました。グルグルの交換回数は平均 **66.7 回**（標準偏差 4.8）。**チョビの方が多く替える家庭は 4,000 軒中 0 軒**でした。運で逆転することはまずありません。



横軸：100 ロール中、グルグルが交換した回数。縦軸：家庭数。点線は「半々」の 50 回。

なぜ？

ロールの終わりは「長い一回」に当たりやすい



終わりの位置はどこに来てもほぼ一様。長い区間ほど当たりやすい。
1回あたりの長さが n 倍 → 当たる確率も n 倍（検査のパラドックス）

回数は半々でも、紙の**長さ**で見るとグルグルの区間が全体の n/(1+n) を占めます。ロールの終わりは使用の切れ目とは無関係な位置に来るので、その位置を「覆っている」のがグルグルである確率は長さの比になります。パスの待ち時間が平均期間より長く感じられるのと同じ理屈です。

```
P(グルグルが交換) = n·E[回数] / (1+n)·E[回数] = n / (1+n)
```

使用量にばらつきを持たせても（1回量をガンマ分布で ±50% ゆらす）結果は同じで、n = 2 で 66.6%、n = 3 で 75.3% でした。効くのは平均使用量の比だけです。

前回の定式化との関係

「最後の 1 回は半々」はいつ成り立つか

前回の厳密式は「二人とも m 回ずつ使い、ロールが**ちょうど使い切れる**」場合のものでした。この条件ではロールの終わりが必ず使用の切れ目に来るので、最後の 1 回は 1/2 です。ただし少し内側では 0.76 まで跳ね、振動しながら n/(1+n) 付近へ収束します。下図は n = 2、m = 12 で、厳密式（線）と 40 万回のシミュレーション（点）の比較です。最大誤差は 0.002 でした。



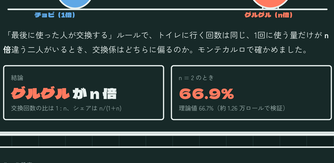
横軸：ロールの末端からの距離 r（チョビ1回分単位）。n = 12 では回数が有限なので、収束先は 2/3 よりわずかに高い 0.673 になります。

実際のトイレットペーパーは使用量の整数倍の長さではないので、ちょうど使い切れることはまずありません。家庭で効いてくるのは結果 1 の n/(1+n) の方です。

補足：短いロール

ロールが短いとジグザグする

毎回まっさらなロールから始め、ロール長 L が1回分の数倍しかない場合、交換シェアは L によって上下します。L = 3、n = 3 ではグルグルの交換確率が 87.5% まで上がります。L が1回分の 10 倍を超えると、ほぼ n/(1+n) に落ち着きます。



理論値は再生方程式 $u(k) = \frac{1}{2}u_0(k-1) + \frac{1}{2}u_1(k-n)$ から計算しています。

結論

ルールは「紙 1 m あたり」で公平



「最後に使った人が交換」は、回数ではなく**使った紙の量に比例して**交換を割り振るルールです。グルグルは n 倍替えますが、紙 1 m あたりの交換負担は二人とも同じなので、ある意味では完全に公平です。回数ベースで公平にしたいなら、交換当番を交互制にするしかありません。