格子の上の宇宙　第 13 版

セルオートマトン（cellular automaton）の物理
— 単純な規則から、どこまで豊かな世界が生まれるか

版: 13.0（日本語版、学習用に並べ替え・各章に副題）
日付: 2026-11-06（第 13 版）
基礎: 四十一回の数値実験（第 1 世代）＋ 第 2 版のために行った十二の計算 ＋ 第 XII 部のために行った三十一の校正 ＋ 第 XIII 部と第 6 章追補のために行った百十二の校正 ＋ 第 33 章と第 XVIII 部のために行った八の校正 ＋ 第 69 章のために行った十三の校正 ＋ 第 70 章のために行った十五の校正 ＋ 第 71 章のために行った十二の校正 ＋ 第 72 章のために行った十三の校正 ＋**第 XIX–XXIV 部（第 74〜83 章）のために行った延べ二百十七の校正（K198–K399）** ＋**第 XXVIII 部（第 86 章）のために行った二十の較正（K408–K427）** ＋**第 XXIX 部（第 87 章）の検算八件（K428–K435、事前宣言なし）**（すべて 🆕 で示す）

図について。 第 0 章の図・概念図・mono 図、および step3/4/5/7/10/11/13/14 は日本語ラベルで描き直した。残る 32 図は元の作図コードが archive に残っていないため英語ラベルのままである。第 XII 部から第 XVIII 部および第 6・33 章の図はすべて日本語である。**第 XIX–XXIII 部の図 20 枚と、第 1・2 章の解説図 2 枚（CA の定義と代数語）も日英それぞれ用意した。**第 86 章の図 1 枚も日英それぞれ用意した。動画も日英それぞれある。

序　単純な法則への願い

序-1. この本の動機

世界が単純な法則でできていてほしい、と願うのは自然なことである。Conway の Life Game は、その願いに具体的な形を与えた最初の玩具だった。三行の規則から、滑空する構造も、自己複製も、万能計算も出てくる。

規則は短い。振る舞いは無限に豊かである。

ならば宇宙もそうではないか。本書はその問いを、**願いのままにせず、計算で追い詰める**ための本である。

追い詰めた結果を先に言う。**願いは、ほとんど叶っている。** 因果律と hard-core 統計は、単純な局所規則から**自動的に出てくる**。相互作用と指数的な階層は、局所拘束と電場項を置いた模型で出てくる（第 13 版で限定した。§87-6）。不確定性関係と $E = mc^2$ は、第 2 章の量子代数を置いたうえで自動的に出てくる。アインシュタイン方程式の側で測れたのは、第一法則などの**必要条件**である（線形次数の主張は第 13 版で、二次の主張は第 11 版で撤回した。§85-2、§87-2）。

叶わなかったところは四つに絞られた。そしてその四つは、いずれも**同じ二つの性質**に帰着した — 格子が**規則的**であること、そして観測量の代数が**可換**であること。

離散性そのものは障害ではなかった。障害は規則性と可換性だった。

これは願いにとって良い知らせである。単純さを捨てる必要はない。捨てるべきは、単純さと一緒くたにされていた別のものだった。

序-2. 本書の順序について

本書は探究の順序では書かれていない。 第 1 世代の四十一実験は行きつ戻りつしており、四度の撤回を含む。教科書としてそれをそのまま並べても学べない。

そこで**学習の順序**に組み直した。

LIZARD LLC

第 0 章：セルオートマトンとは何か（前提知識なし、図で説明）
第 I 部：何を仮定したのかを正確にする
第 II 部：タダで手に入るものを数える（願いが叶っている部分）
第 III 部：最初の壁と、その越え方
第 IV--IX 部：時間、量子性、場、時空、物質、重力の順に確かめる
第 X 部：差を総括し、必要な要素を列挙する
第 XI 部：現実の世界を書く候補理論を評価する
第 XII 部：候補の一つを実験まで持っていく
第 XIII--XVIII 部：場の方程式、地平線、回転曲線、同時性、相関、そして総括
第 XIX--XXI 部：時間の問題、測度と矢、そして三択（第 1--3 期）
第 XXII 部：不規則な因果集合の変形代数（本書最大の単一の問い）
第 XXIII--XXIV 部：回転曲線ふたたび、そして 9 版以降の総括
第 XXV 部：差分と絶対値 — カシミール、Jacobson、流体力学極限
第 XXVI 部：重力はなぜ弱いか — 次元は指数を、結合は係数を決める
第 XXVII 部：第 10 版への外部検証 — 六つの訂正
第 XXVIII 部：第二法則 — 量子論の定理は格子に載るか
第 XXIX 部：第 12 版への査読 — 二件の撤回と、縮めた断定
第 88 章：結び

ただし**導出の過程は削っていない**。結論だけを圧縮すると、読者は「探して分かった」という経験を奪われる。特に第 III 部と第 VIII 部では、失敗した仮説と較正の落第を本文に残した。付録 C にすべての誤りを記録してある。

序-3. 凡例

記号	意味
✅	定理、または数値的に確立
⚠️	部分的結果、条件付き
❌	反証された、または原理的な障害
🆕	本書のために新たに計算した結果
💭	本書における解釈
📚	文献に基づく記述（本探究では検証していない）

🆕 と 📚 **の区別は本書の生命線である。** 撤回できるように書くことが、書き方の唯一の規律である。

序-4. 二つの言語

本書は同じ内容を二通りに書く。どちらも必要である。

言語	基本対象	得意なこと
配置空間	セルの値の配置 $\Sigma^{\mathcal{L}}$	直観、計算、可視化
代数	観測量の代数 $\mathcal{A}$	定理、拘束、領域分割、量子化

第 2 章で両者を橋渡しし、以後は場面ごとに使い分ける。**代数語は圧縮のためではなく、障害の帰属を正確にするために使う。**

第 0 章　セルオートマトンとは何か

— 単純な規則から、どれだけ豊かな世界が生まれるか

この章に前提知識は要らない。 名前も、仕組みも、ここで初めて聞くもの、として書いてある。

正式な呼び名は**セルオートマトン**（英語で **cellular automaton**、複数形は cellular automata、略して **CA**）という。日本語では「セル・オートマトン」「細胞自動機械」と書かれることもあるが、本書では一貫して**セルオートマトン**、略して **CA** と呼ぶ。

名前の由来はそのまま中身である。**セル**（cell）は「区切られた小さな部屋」、**オートマトン**（automaton）は「自分で動く機械」。つまり　CA とは

> **細かく区切った部屋が方眼紙のように並んでいて、それぞれの部屋が「隣を見て、自分の次の値を決める」という同じ一つの規則に従って、いっせいに更新されていく仕掛け**

のことである。部屋の値は有限個（たとえば「白か黒か」の二通り）しかなく、規則は表 1 枚に書ける。それだけである。

それだけなのに、出てくるものは尽きない。　三行の規則から、動く物体・衝突・記憶・自己複製、そして計算機そのものが生まれる。本書がこの仕掛けを物理の言葉で追いかけるのは、まさにこの一点 — **規則の単純さと、生成物の豊かさの落差**があまりに大きいからである。

格子と規則と時間があればよい。以下はすべて実際に走らせたものである。

0-1. 部品は三つしかない

セルオートマトン（CA）を作るには、三つのものを決める。

(1) 格子　セルがどこに並ぶか
(2) 状態　一つのセルが取りうる（有限個の）値
(3) 規則　近傍の値から次の値を返す関数

そして**すべてのセルが同時に同じ規則を適用する**。これで全部である。

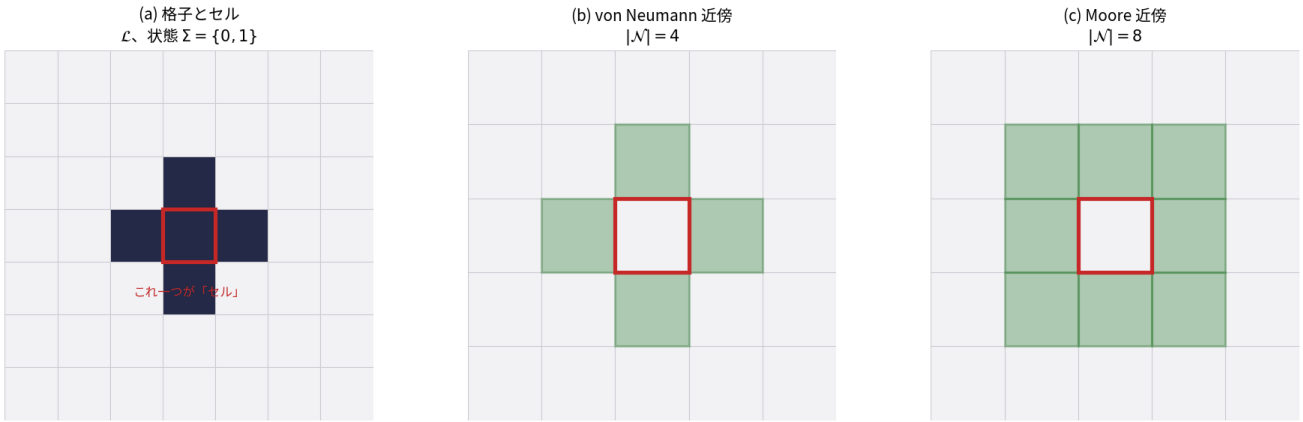


図 0-1. (a) セルは格子の上に並び、それぞれ値を持つ。ここでは黒が 1、白が 0。(b)(c) 近傍は選べる。上下左右の 4 セルが von Neumann 近傍、斜めを加えると Moore 近傍になる。

大事な点の一つは、規則が**近傍しか見ない**ことである。遠くのセルの値は、次に自分が何になるかに直接には効かない。この一事が後に**因果律**になる（§0-5）。

もう一つの大事な点は、状態が**有限個**であること — 一箇所が持つ情報は有限だ、という主張である。これが後に「紫外発散が無い」ことと「$U(1)$ が載らない」ことの両方を支える。

0-2. ライフゲーム — 三行から

Conway のライフゲームは、2 次元格子、二状態、Moore 近傍、そして三行の規則を使う。

生きたセルは近傍に 2 個か 3 個生きていれば生き残る。それ以外は死ぬ
死んだセルは近傍にちょうど 3 個生きていれば生まれる
それ以外は何も変わらない

慣例では **B3/S23**（Birth 3 / Survive 2,3）と書く。**これが規則のすべて**である。隠れたパラメータも、乱数も、例外も無い。

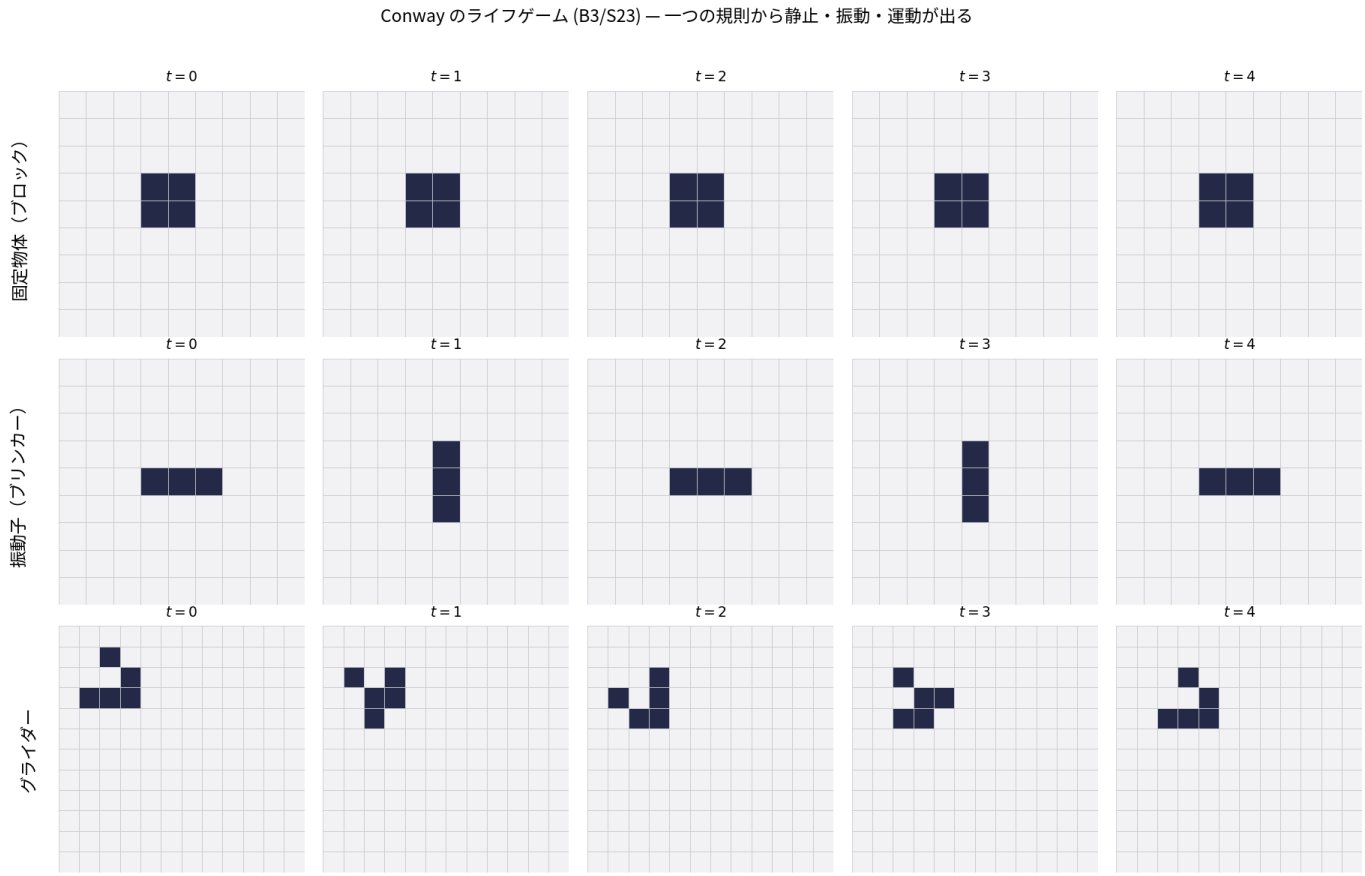


図　0-2. 一つの規則から三種類の振る舞いが出る。上：固定物体（ブロック）は永久に静止する。中：振動子（ブリンカー）は周期　2　で戻る。下：グライダーは 4 段で自分の形に戻り、斜めに 1 セルずれている — 動く構造である。

三つとも同じ規則から出てくることが、驚きの中身である。**誰も「静止するもの」「振動するもの」「動くもの」を別々に設計していない。一つの規則がすでにそれらを含んでいた。**

さらに、グライダーを衝突させれば論理ゲートが組め、したがって**万能計算機**が作れることが知られている　📚　三行の規則が計算の全能力を担っている。

> 💭 本書はここから始まる。**単純な規則の振る舞いが単純である必要は無い。** ならば我々の宇宙の規則も単純かもしれない。

0-3. 一次元なら全規則を尽くせる

二次元は美しい絵を作るが、規則が多すぎて見渡せない。**一次元・二状態・三セル近傍**に絞ると、規則はちょうど

$$2^{2^3} = 2^8 = 256 \text{ 個}$$

になる。これが**初等セルオートマトン**（ECA）で、0 から 255 の番号が付く。

規則を決めるとは、8 通りの近傍それぞれに出力ビットを一つ書くこと以上の意味を持たない。その 8 ビットを二進数として読めば規則番号になる。

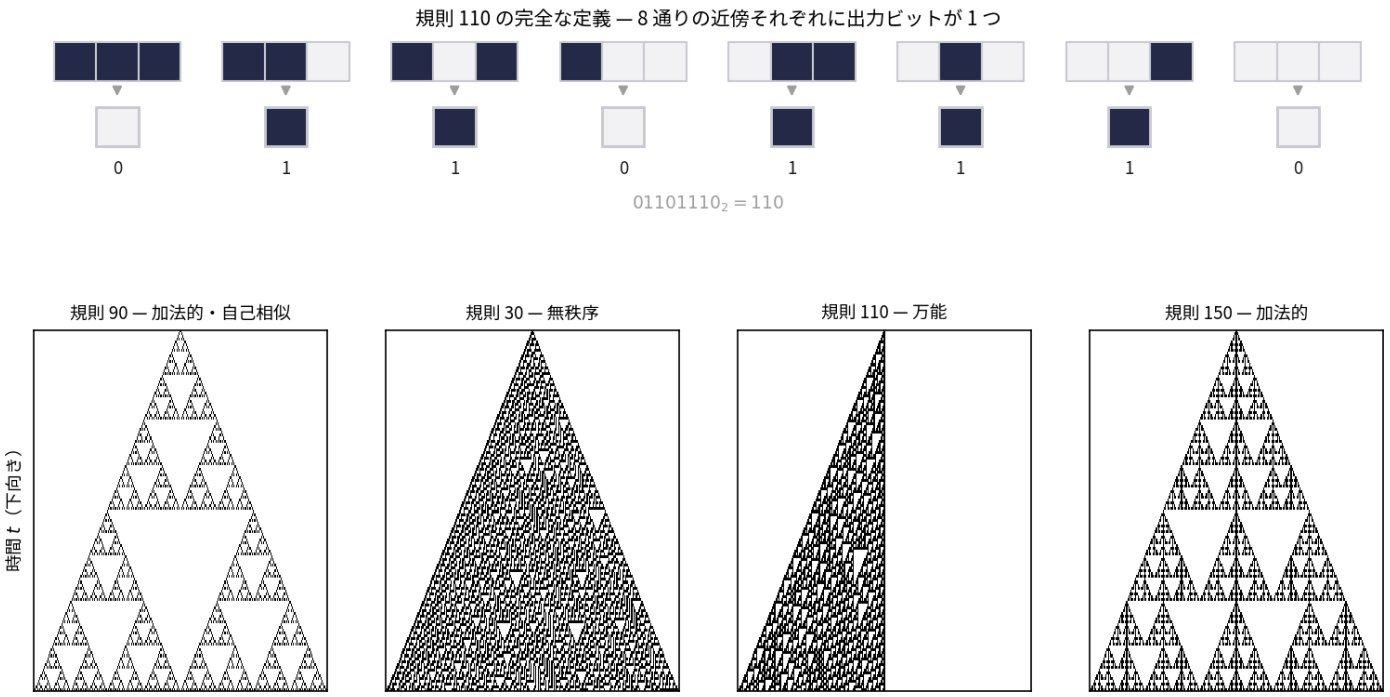


図 0-3. 上：規則 110 の完全な定義。八つの箱を埋めれば規則が決まる。$01101110_2 = 110$ がその名前である。下：1 を立てた一セルから始めた時空図（上が $t = 0$、時間は下向き）。同じ枠組みからフラクタル（90、150）も、無秩序（30）も、構造と背景の混合（110）も出る。

図 0-3 の下段は本書の縮図である。**枠組みは一つ、出てくるものは種類が違う。**

規則	振る舞い	性質
90、150	Sierpinski 型のフラクタル	**加法的**（$\mathbb{F}_2$ 上で線形）。厳密に解ける
30	無秩序。乱数源に使われる 📚	非線形。予測が難しい
110	局所構造が背景の上を動き衝突する	**万能計算** 📚

📚 規則 110 の万能性は Cook (2004) による。**三セル近傍・二状態という最小の設定で、すでに計算の全能力に達している。**

0-4. 四つの型 📚

Wolfram は ECA の振る舞いを四つのクラスに分類した。

クラス	振る舞い	例
1	一様な状態に落ち着く	規則 0、32
2	単純な周期構造に落ち着く	規則 4、108
3	無秩序なままである	規則 30、45
4	局所構造が動き回り相互作用する	**規則 110**

⚠️ この分類には厳密な定義が無く、境界も曖昧である。しかし**クラス 4 が計算能力と結び付く**という観察は後で効いてくる。

> 💭 物理的に面白いのはクラス 4 である。クラス 1 と 2 は何も起こらない宇宙、クラス 3 は構造を保てない宇宙に対応する。**持続し、動き、相互作用する構造** — それこそが我々の宇宙が満たしている条件である。

LIZARD LLC

0-5. 情報はどこまで速く伝わるか

CA を物理として読む第一歩がここにある。規則が**近傍しか見ない**ので、情報は一段あたり最大でも一セルしか進めない。

確かめ方は簡単である。**初期条件のセルを一つ反転させ、二つの世界の差を追う。**

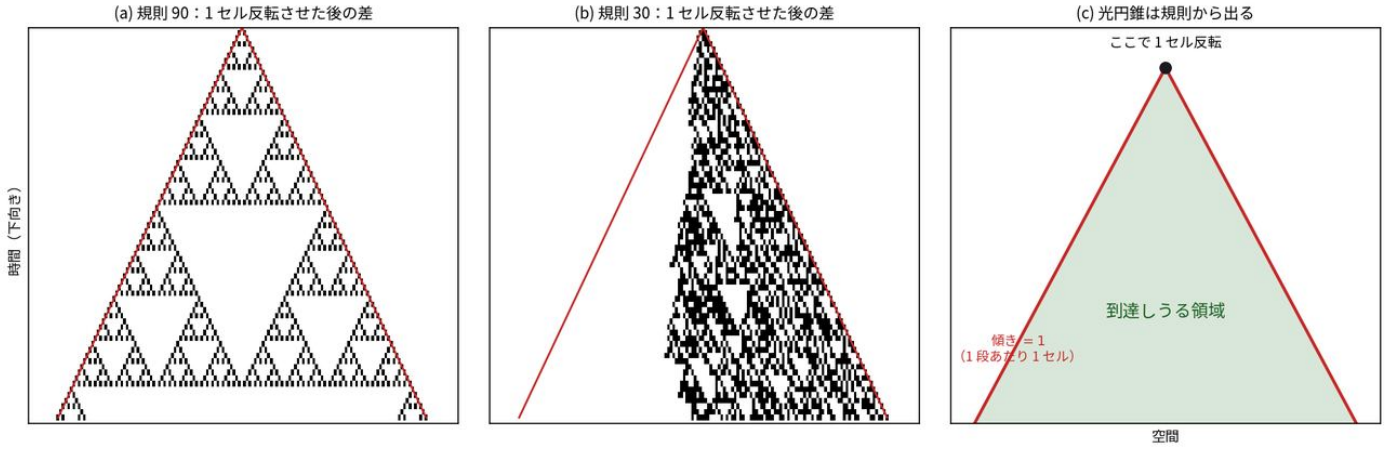


図 0-4. (a)(b) 無秩序な初期条件から、真ん中の一セルだけが違う二つの世界の差。赤線が一段一セルの限界を示す。差は決してそれを越えない。(c) その三角形が光円錐である。

> 光円錐は規則の構造から出てくる。仮定したのではない。

本物の物理では因果律は**理論に課される公理**である。相対論は光より速いものが無いことを要求する。CA にはそのような要求が要らない。**近傍が有限であることから、束は最初から存在している。**

差が円錐を**埋める**必要は無いことに注意する。円錐は上限であり、実際の伝播はもっと遅くてもよい。越えることだけができない。

0-6. 時間は逆に回せるか

ライフゲームを逆再生できるか。**できない** — 違う過去が同じ現在に至る。

しかし、少し書き換えればどんな規則も**厳密に可逆**にできる。その処方が**二階形式**である。

$$x_{t+1} = f(x_t) \oplus x_{t-1}$$

現在だけでなく**一つ前の段**も憶えておき、規則の出力と XOR する。$\oplus$ は自分自身を打ち消すので、方程式は逆向きに解ける。

$$x_{t-1} = f(x_t) \oplus x_{t+1}$$

同じ規則がそのまま逆写像になっている。

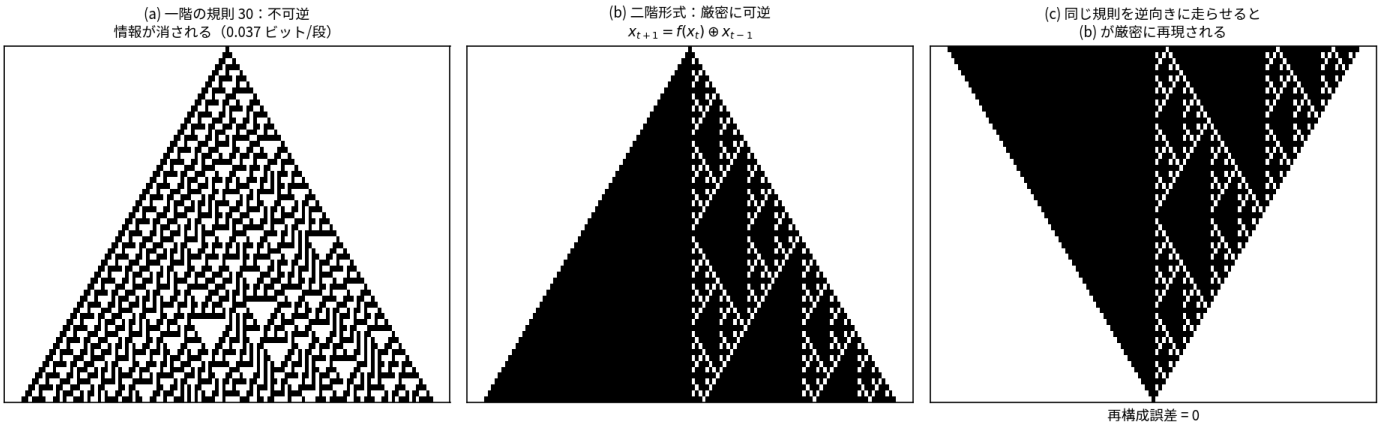


図 0-5. (a) 一階の規則 30 は不可逆で、情報が消される。(b) 同じ f を二階形式にすると厳密に可逆になる。(c) (b) の最後の二行から逆向きに走らせると (b) が厳密に再現される（再構成誤差 $= 0$）。

規則は何も変えていない。**変えたのは「状態」と呼ぶものだけである。**
可逆性は規則の性質ではなく、状態の定義の性質である。

この一点が本書の後半全体を貫く。 第 15 章は可逆 CA に論理的な消去がないことをビット単位で測り（熱との関係は §87-4）、第 17 章は可逆であることが基底状態を持たないことを意味すると示す。可逆性は良い話ばかりではない。

0-7. 自己相似性 — 規則が自分自身を含む

加法的な規則（90 や 150 のように $\mathbb{F}_2$ 上で線形なもの）には際立った性質がある。

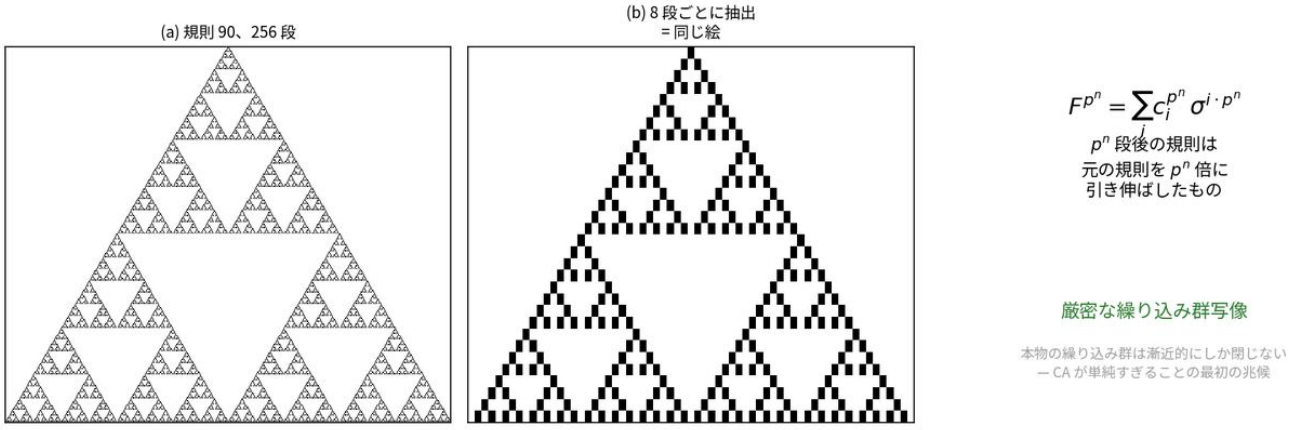


図 0-6. (a) 規則 90 を 256 段走らせたもの。(b) 8 段ごと・8 セルごとに抽出したもの。同じ絵が現れる。 (c) その理由。

$$F^{p^n} = \sum_i c_i^{p^n} \sigma^{i \cdot p^n}$$

p^n 段後の規則は、元の規則を p^n 倍に引き伸ばしたものと同じ形をしている。 これは厳密な**繰り込み群変換**である。

本物の物理の繰り込み群は、固定点の近傍で近似的にしか閉じない。ここで厳密に閉じてしまうことは、**CA が単純すぎることの最初の兆候** である。第 10 章でこの兆候は定理になる。解ける模型は測度ゼロの島を成す。

0-8. 物理学者がこれを見る理由

道具は揃った。**格子、有限の状態、局所的な規則、同時更新**。そしてすでに次のものが手に入っている。

すでにあるもの	どこから
因果律（光円錐）	近傍が有限だから（§0-5）
有限性	状態が有限だから（§0-1）
可逆性	状態を定義し直せば（§0-6）
厳密な繰り込み	加法的規則について（§0-7）
複雑さ、万能計算	規則 110、ライフゲーム（§0-2、§0-3）

物理の基本的な性質がいくつか、**仮定せずに**現れた。ならば残りも出てくるかもしれない。

本書はこの期待を、四十一回の数値実験とさらに十二の計算で押していく。**どこまで行けてどこで止まるかを、桁まで確定させるのが目的である。**

問い 1　セルオートマトンはどこまで物理法則を書けるか
問い 2　現実の世界を描くには他に何が要るか
問い 3　世界は単純でありながら非決定的でありうるか

次章はこれらすべてを厳密に述べ直す。**第 1 章は第 0 章を数学の言葉で書いたものであり、新しい概念は加えない。**

第 I 部　規則を書く ― 何を仮定したのか

第 1 章　セルオートマトンとは何か

― 何を仮定したのかを、逃げ道なく書き下す

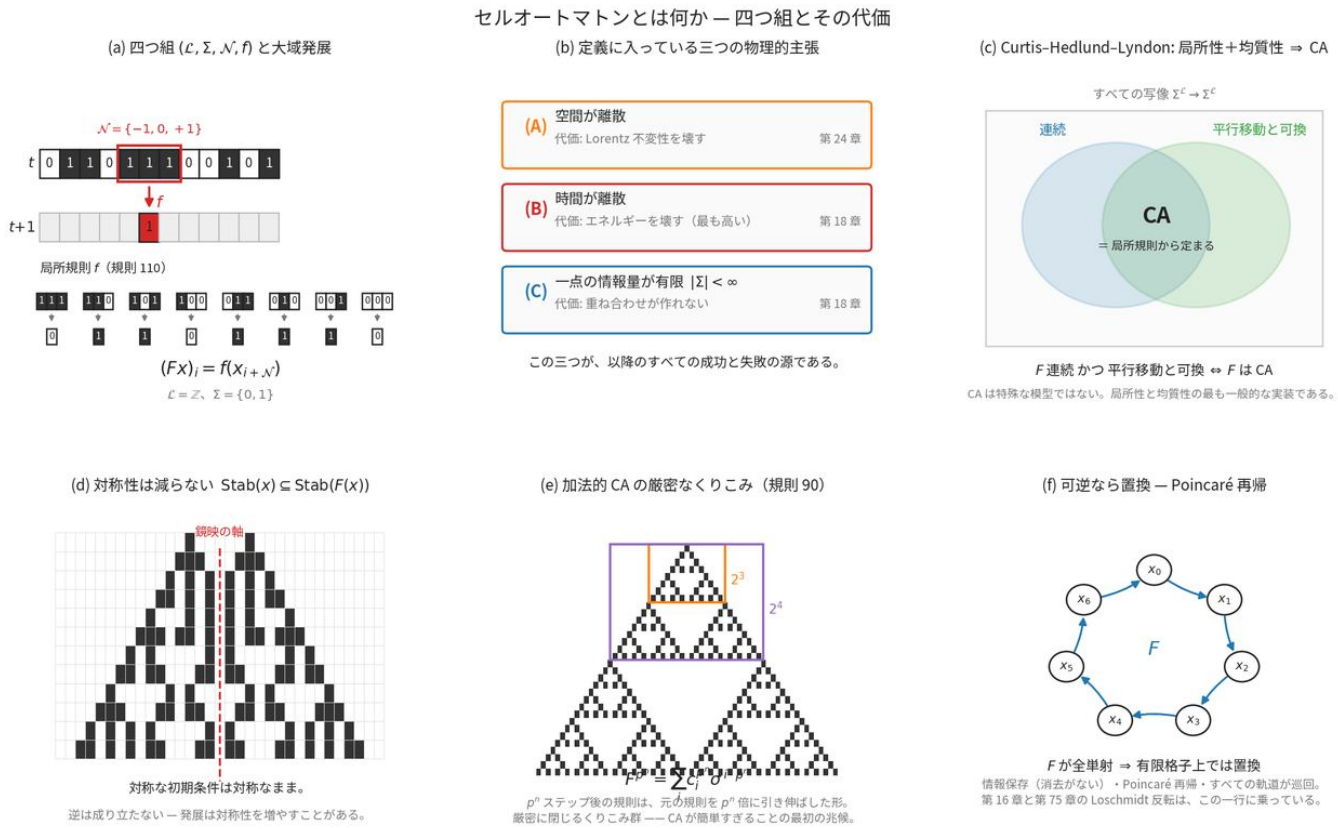


図 1-1. (a) 四つ組 $(\mathcal{L}, \Sigma, \mathcal{N}, f)$ と大域発展 $(Fx)_i = f(x_{i+\mathcal{N}})$。局所規則は表引きである（規則 110）。(b) 定義に既に入っている三つの物理的主張と、それぞれの代価。最も高くつくのは (B) 時間の離散性である。(c) Curtis–Hedlund–Lyndon の定理。局所性と均質性を課すと CA 以外に選択肢がない。(d) 対称性は減らない ― 対称な初期条件は対称なまま。(e) 加法的 CA の厳密なくりこみ（規則 90）。p^n ステップ後の規則は元を p^n 倍に引き伸ばした形。(f) 可逆なら有限格子上で置換となり、Poincaré 再帰が従う。

1-1. 定義

$$(\mathcal{L},\ \Sigma,\ \mathcal{N},\ f)$$

記号	意味
$\mathcal{L}$	格子（典型的には $\mathbb{Z}^d$）
Σ	一つのセルが取りうる状態の**有限**集合
$\mathcal{N}$	近傍（有限個のずれ）
$f : \Sigma^{\mathcal{N}} \to \Sigma$	局所規則

大域発展は $(Fx)_i = f(x_{i+\mathcal{N}})$。

この定義には既に三つの物理的主張が入っている。**この三つが以降のすべての成功と失敗の源である。**

(A) 空間が離散
(B) 時間が離散
(C) 一つの場所の情報量が有限　($|\Sigma| < \infty$)

先に結論を言っておくと、**最も高くつくのは (B) である**（第 18 章）。(A) は Lorentz 不変性を壊すが、(B) は**エネルギーそのものを壊す**。

1-2. Curtis-Hedlund-Lyndon の定理 ✅

$$\boxed{F \text{ が連続かつ平行移動と可換} \iff F \text{ は局所規則から定まる CA}}$$

物理的な読み方が本書の出発点である。**「局所的である」と「均質である」を課すと、CA 以外に選択肢がない。** CA は特殊な模型ではなく、局所性＋均質性の最も一般的な実装である。

📚 Hedlund (1969)。

> ⚠️ **限定（第 13 版）。** Curtis–Hedlund–Lyndon の定理の仮定は、局所性と均質性だけではない。全シフト、積位相、連続性、有限のアルファベットを使う。「CA 以外に選択肢がない」のは、この枠の中での話である。§87-9。

1-3. 対称性は減らない ✅

$$\mathrm{Stab}(x) \subseteq \mathrm{Stab}(F(x))$$

配置を不変にする対称性は、時間発展後も不変にする。Life Game が対称な初期条件から対称なパターンを保つのは、この一行の帰結である。逆は成り立たない（発展は対称性を**増やす**ことがある）。これは後の「時間の矢」に効く。

1-4. 加法的 CA の厳密なくりこみ ✅

$\Sigma = \mathbb{F}_p$ 上で規則が線形なら $F = \sum_i c_i \sigma^i$ と書け、Frobenius により

$$F^{p^n} = \sum_i c_i^{p^n} \sigma^{i \cdot p^n}$$

p^n ステップ後の規則は、元の規則を p^n 倍に引き伸ばした形をしている。 厳密なくりこみ群変換であり、CA がフラクタルを作る理由でもある。

現実のくりこみ群は近似的にしか閉じない。ここで厳密に閉じるのは、**CA が簡単すぎることの最初の兆候**である。

1-5. 可逆性

F が全単射なら CA は可逆。有限格子上では**置換**であり、以下がすべて従う。

帰結	内容
情報保存	消去がない（第 16 章で定量化）
Poincaré 再帰	すべての軌道が有限周期の巡回
基底状態の不在	置換のスペクトルは単位円上の準エネルギー（エネルギーとの関係は §87-7 で限定）

二階形式は任意の規則を可逆化する一般的な処方である。

$$x_{t+1} = f(x_t) \oplus x_{t-1}$$

規則の中身を変えずに可逆になる。**可逆性は規則の性質ではなく、状態を何と定義するかの性質である。**

> ⚠️ **限定（第 13 版）。** $\oplus$ を使うには状態集合に群を選ぶ必要がある（任意の有限集合に $\mathbb{Z}_{|\Sigma|}$ を置けばよい）。また二階形式は元の規則の埋め込みではなく、**別の可逆力学**である（規則 30 で一階の軌道と一致するのは最初の 1 歩だけ。K432）。§87-4。

第 2 章　三つ組 — 代数・自己同型・状態

— 物理の理論を作るのに、最低限そろえるべき部品は何か

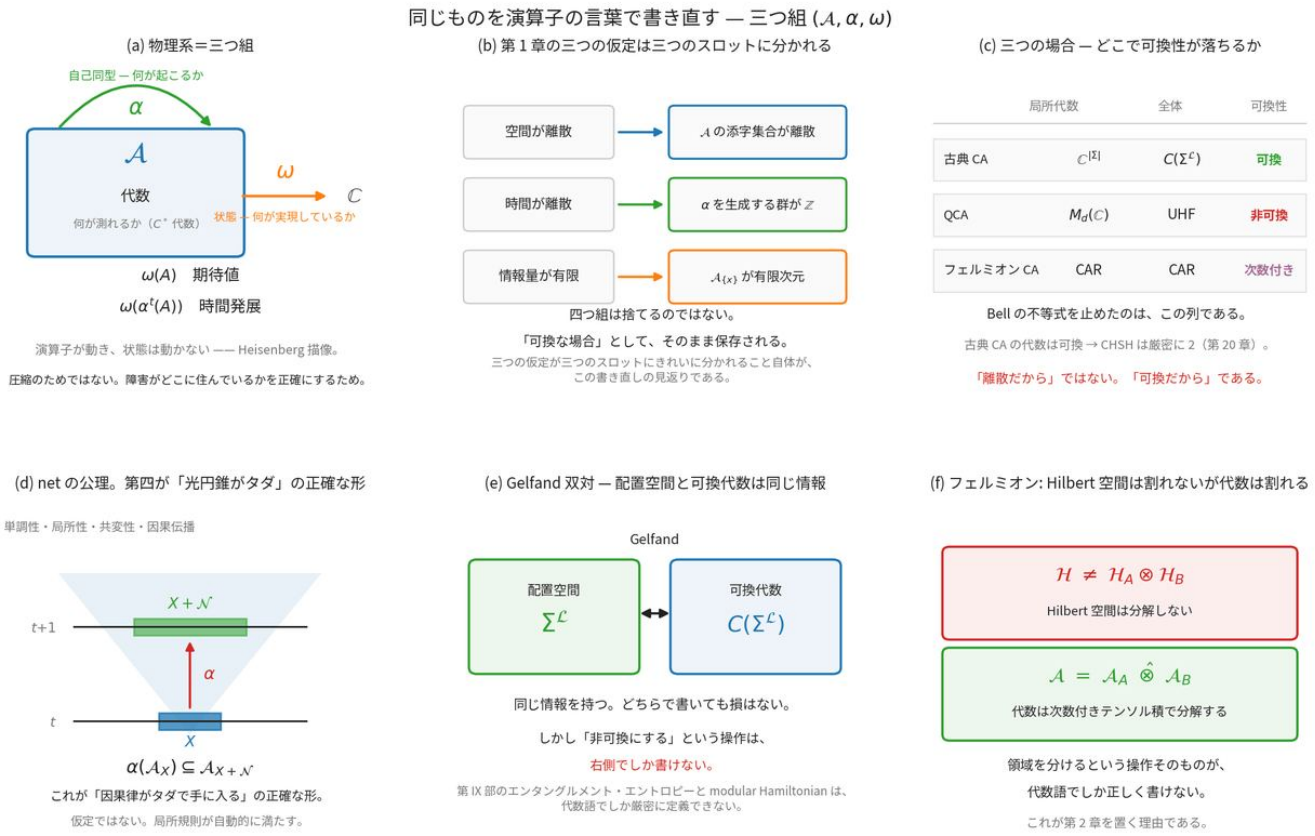


図 2-1. (a) 物理系＝三つ組 $(\mathcal{A}, \alpha, \omega)$。演算子が動き、状態は動かない。(b) 第 1 章の三つの仮定が三つのスロットにきれいに分かれる。四つ組は「可換な場合」として保存される。(c) 三つの場合。可換性が落ちる場所が Bell の不等式を止めた場所である。(d) net の公理。第四の因果伝播 $\alpha(\mathcal{A}_X) \subseteq \mathcal{A}_{X+\mathcal{N}}$ が「光円錐がタダ」の正確な形。(e) Gelfand 双対。配置空間と可換代数は同じ情報を持つが、「非可換にする」操作は代数側でしか書けない。(f) フェルミオンでは Hilbert 空間は分解しないが、代数は次数付きテンソル積で分解する。

第 1 章の四つ組は配置空間の言葉である。同じものを演算子の言葉で書き直す。**圧縮のためではない。障害がどこに住んでいるかを正確にするためである。**

2-1. 三つ組

$$\boxed{\text{物理系} = (\mathcal{A},\ \alpha,\ \omega)}$$

記号	名前	内容
$\mathcal{A}$	代数	観測可能量の C^* 代数（何が測れるか）
α	自己同型	時間発展 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$（何が起こるか）
ω	状態	正規化された正値汎関数（何が実現しているか）

期待値は $\omega(A)$、時間発展は $\omega(\alpha^t(A))$。**演算子が動き、状態は動かない** — Heisenberg 描像である。

第 1 章の三つの仮定が、きれいに三つのスロットに分かれる。

$$\begin{aligned}\text{空間が離散} &\longrightarrow \mathcal{A} \text{ の添字集合が離散}\\ \text{時間が離散} &\longrightarrow \alpha \text{ を生成する群が } \mathbb{Z}\\ \text{情報量が有限} &\longrightarrow \mathcal{A}_{\{x\}} \text{ が有限次元}\end{aligned}$$

2-2. 三つの場合

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{X\text{ 有限}} \mathcal{A}_X}$$

	局所代数	全体	可換性
古典 CA	$\mathbb{C}^{\lvert\Sigma\rvert}$	$C(\Sigma^{\mathcal{L}})$	**可換**
QCA	$M_d(\mathbb{C})$	UHF 代数	非可換
フェルミオン CA	CAR	CAR 代数	次数付き

古典の場合は Gelfand 双対そのものであり、**配置空間と可換代数は同じ情報を持つ**。四つ組は捨てるのではなく、可換な場合として保存される。

フェルミオンの領域分割（第 IX 部で必須）については重要な違いがある。

$$\mathcal{H} \neq \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B, \qquad \mathcal{A} = \mathcal{A}_A \hat{\otimes} \mathcal{A}_B$$

Hilbert 空間は分解しないが **代数は次数付きテンソル積で分解する**。第 IX 部のエンタングルメント・エントロピーと modular Hamiltonian は、代数語でしか厳密に定義できない。

> ⚠️ **限定（第 13 版）。** 有限モードの Fock 空間は、モードの順序を選べばテンソル積に分解できる（Jordan–Wigner）。問題は、局所代数が次数付きで、その分解が局所的でないことである。§87-9。

2-3. net の公理（Haag-Kastler の離散版）

公理	内容	CA での意味
単調性	$X \subseteq Y \Rightarrow \mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{A}_Y$	大きい領域は多くを含む
局所性	$X \cap Y = \varnothing \Rightarrow [\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y] = 0$	離れた場所は同時測定可能
共変性	$\sigma_v(\mathcal{A}_X) = \mathcal{A}_{X+v}$	並進対称性
因果伝播	$\alpha(\mathcal{A}_X) \subseteq \mathcal{A}_{X+\mathcal{N}}$	**光円錐**

第四公理が「因果律がタダで手に入る」の正確な形である。仮定ではなく、局所規則が自動的に満たす性質である。

2-4. CHL と GNVW の並置 ✅📚

局所性の定義は、古典と量子でまったく同一になる。

$$\boxed{\alpha \text{ が局所的} \iff \alpha(\mathcal{A}_X) \subseteq \mathcal{A}_{X+\mathcal{N}}}$$

	古典 CA	QCA
代数	可換	非可換
発展	$*$-自己準同型	$*$-自己同型
局所性	上式	**同一**
特徴づけ	**CHL**（1969）	**GNVW**（2012）📚
1 次元の構造定理	ブロック置換 ∘ シフト 📚	回路 ∘ シフト（指数）📚
不変量	—	指数 $\mathrm{ind} \in \mathbb{Q}_{>0}$

> CHL と GNVW は、**可換か非可換かという一点だけを違えた同じ定理**である。
> 量子論に移っても、局所性と均質性を課す限り CA 的構造から出られない。

💭 第 19 章で「古典 CA か QCA か」の分岐に到達するが、**その分岐の両側とも CA である**。「CA では宇宙を書けないのでは」という問いの立て方自体が、代数語では成り立ちにくくなる。

⚠️ 高次元では古典側で 2 次元 CA の可逆性判定が決定不能、量子側で 3 次元に非自明な類が存在する（📚Kari 1994; Freedman–Hastings 2020; Haah–Fidkowski–Hastings）。本書は検証していない。

第 II 部　タダで手に入るもの

願いが叶っている部分を先に数える。 ここに挙げるものはすべて、局所規則から — 第 2 章の三つ組（CAR 代数と複素構造を含む）のほかに — 追加の仮定なしに出てくる（範囲を第 11 版で限定した。§85-4）。

第 3 章　因果律と光円錐 ✅

— なぜ情報の速さには上限があるのか

現実の物理では因果構造は計量から従い、因果律は理論の公理として課される。

CA では**規則が近傍しか見ないので、情報は 1 ステップに 1 格子分しか進めない。**

> 光円錐は公理ではなく、規則の構造から自動的に従う。

さらに、規則を空間依存にすると**計量が読み出せる。**

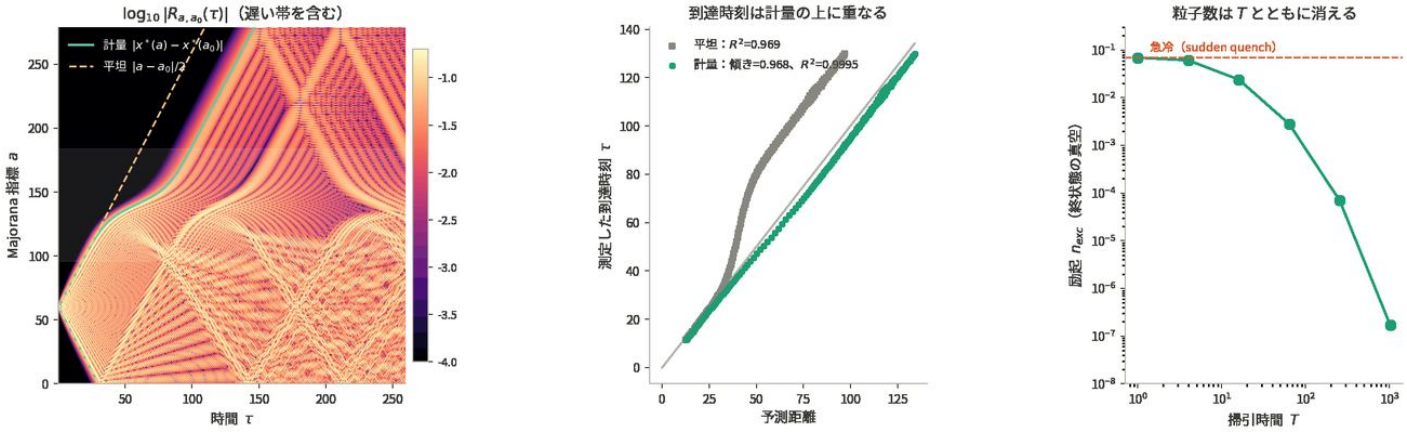


図 3-1. 局所的な伝播速度から曲がった時空の計量を再構成する。傾き 1.00 ± 0.04、決定係数 $R^2 = 0.999$。

規則を時間依存にすれば膨張（$\beta \neq 0$）も出る。**運動学的な一般相対論は、CA で完全に再現される。**

> ⚠️ **限定（第 13 版）。** 局所伝播速度から定義できるのは、有効な因果構造である。共形因子、曲率、時計の較正、力学は別に要る。「完全に再現」「計量の再構成」は取り下げる。§87-9。

第 4 章　生成消滅演算子は複素構造である ✅

— 粒子・真空・不確定性関係は、なぜ同じ一つのものなのか

本書全体で最も重要な同定であり、CA と量子論を結ぶ橋である。

4-1. 同定

Majorana 表示で $\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\delta_{ab}$。「どの γ の組を一つの粒子と呼ぶか」を選ぶことは、実 $2N$ 次元空間上に**複素構造** J を選ぶことにほかならない。

$$a_j = \frac{\gamma_{2j-1} + i\gamma_{2j}}{2}$$

その選び方全体は等質空間をなす。

$$\boxed{\mathcal{M} = O(2N)/U(N), \qquad \dim \mathcal{M} = N(N-1)}$$

純粋 Gaussian 状態の共分散行列 Γ（$\langle \gamma_a \gamma_b \rangle = \delta_{ab} + i\Gamma_{ab}$）は $\Gamma^2 = -\mathbb{1}$ を満たす。Γ 自身が複素構造である。

4-2. 三つの顔 💭

$$\mathcal{M} = \{\text{飽和した不確定性関係}\} = \{\text{真空}\} = \{\text{ディラックの海の詰め方}\}$$

読み方	内容
不確定性	$\|\Gamma\| \le 1$ がフェルミオンの不確定性関係。純粋 Gaussian が等号
真空	各 Γ が「何を粒子と呼ぶか」を定め、対応する真空を定める
ディラックの海	負エネルギー状態の詰め方の選択そのもの

「粒子とは何か」「真空とは何か」「不確定性関係とは何か」は、同一の幾何学的対象の三つの名前である。

代数語では $\mathcal{M}$ は第三スロットに住む — **CAR 代数上の純粋準自由状態の全体**である。

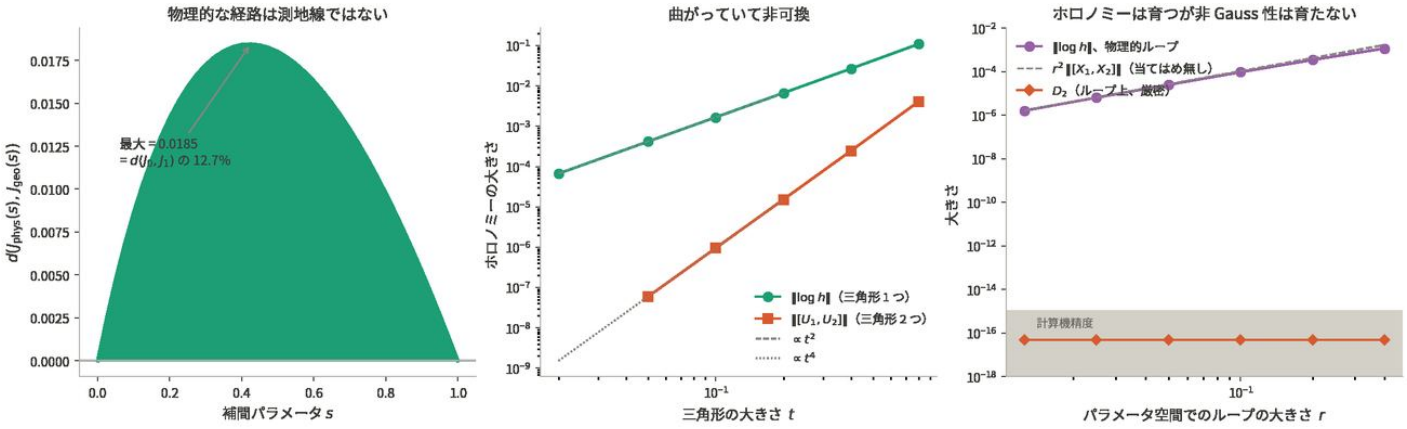


図 4-1. $\mathcal{M}$ 上で J を輸送する。閉ループを回ると $U(N)$ ホロノミーが現れる。ホロノミー指数 2.0002、整列度 1.000000。

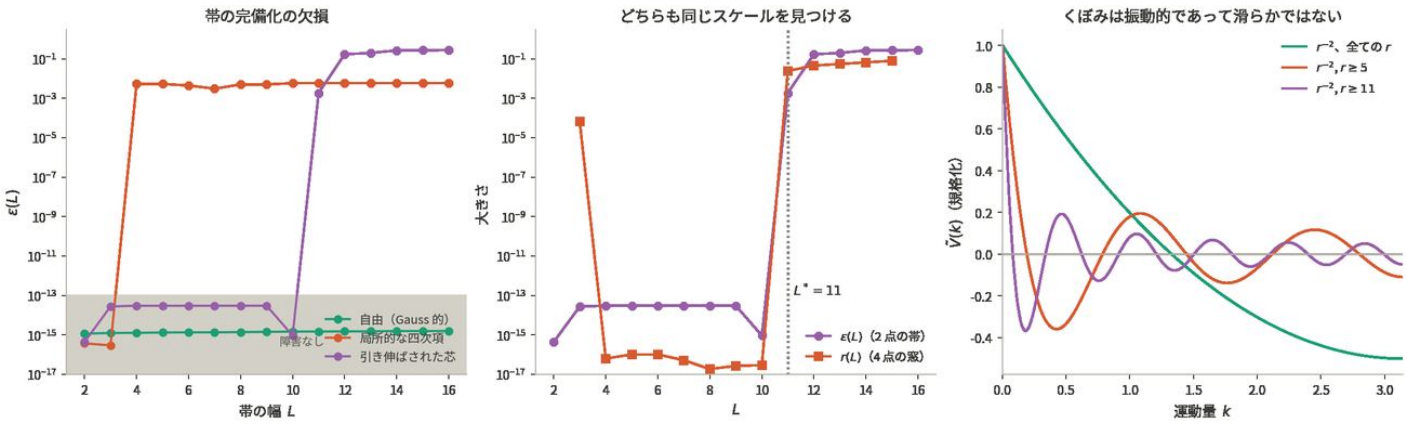


図 4-2. 貼り合わせと不確定性の飽和。$\|\Gamma\| \le 1$ の等号が純粋 Gaussian に対応する。

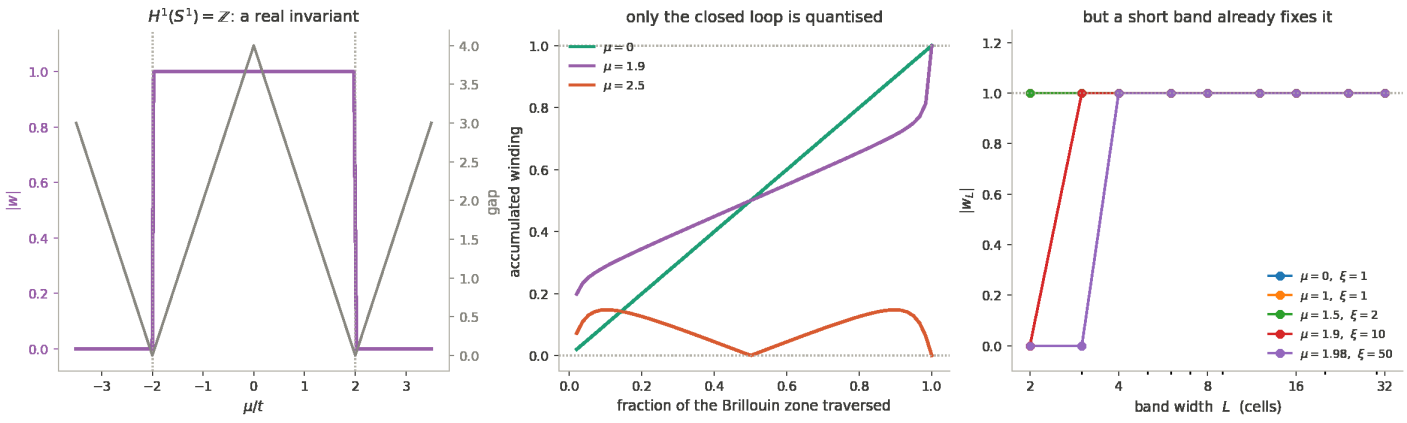


図 4-3. 環の上での J の輸送。トポロジーが許す配置が限られる。

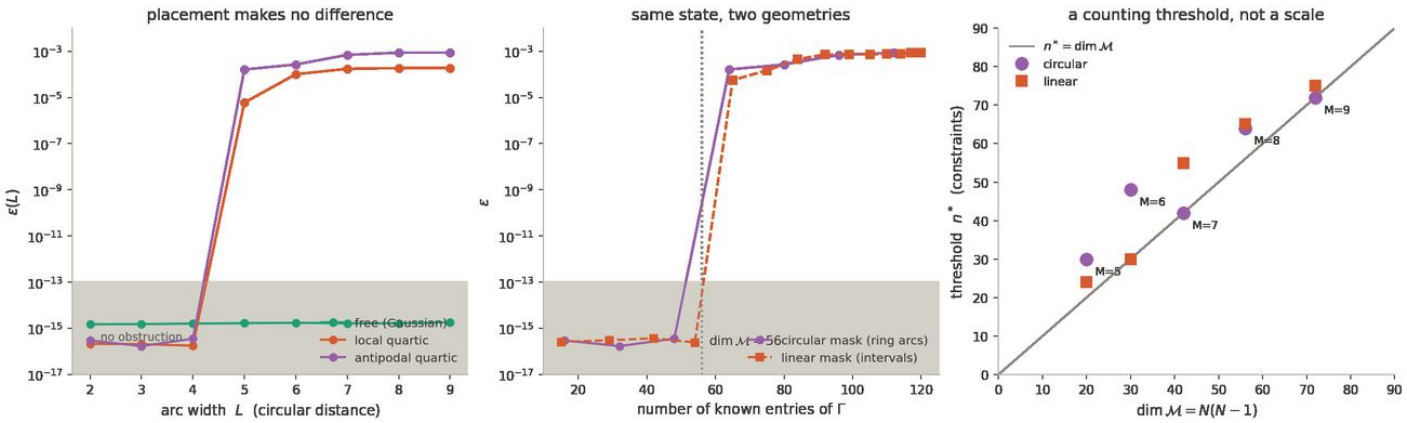


図 4-4. 環上の準位構造。境界条件が離散スペクトルを決める。

> ⚠️ **限定（第 13 版）。** 対応が厳密なのは Gaussian 状態の幾何（Γ と複素構造、Fock 真空）についてである。「ディラックの海」「負エネルギー」には Hamiltonian の選択が要る。§87-9。

第 5 章　ゼロ点振動 ✅

— 真空はなぜ静止していないのか

$$E_0 = \tfrac{1}{2}\hbar\omega, \qquad \Delta x\,\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

第 4 章の $\mathcal{M}$ がそのまま答えである。$\Gamma^2 = -\mathbb{1}$ が不確定性関係の**飽和条件**であり、飽和した状態でも γ_{2j-1} と γ_{2j} を同時に確定できない。

自由フェルミオンの基底エネルギー $E_0 = -\frac{1}{2}\sum_k \epsilon_k$ の $\frac{1}{2}$ がゼロ点振動である。**第 4 章の $\mathcal{M}$ のほかに追加の仮定なしに出る**（§85-4）。

> ⚠️ **限定（第 13 版）。** 冒頭の $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ はボソンの式で、フェルミオンの基底エネルギーは $-\frac{1}{2}\sum_k \epsilon_k$（$H = \sum_k \epsilon_k(a_k^\dagger a_k - \frac{1}{2})$ の順序）と負である。次節の $\rho_{\text{vac}} \sim \sum \epsilon_k/2$ は大きさの見積もりで、符号は含まない。§87-9。

5-1. ただし宇宙定数問題も継承する ❌

$$\rho_{\text{vac}} \sim \sum_k \frac{\epsilon_k}{2} \sim \Lambda_{\text{cutoff}}^4$$

格子があるので発散はしない。しかし**カットオフが格子間隔で決まるだけで、小さくはならない**。Planck 長に取れば観測値の 10^{120} 倍になる。

CA は無限大を回避するが、宇宙定数問題は回避しない。問題は発散ではなく**大きさ**だからである。

第 6 章　質量は幾何である ✅

— 質量とは何の量なのか。そしてドブロイ波はどこから来るのか

現実の物理では $E = mc^2$ は導出される定理である。

6-1. 質量は長さの比である

CA では、質量 m と速度パラメータ v を独立に大きく振っても、**m/v が同じなら零モードの形が一致する**。

検定	結果
m を 56%、v を 80% 変えて m/v 固定	波動関数の相関 0.9997
局在長 vs 格子の厳密式	0.01% 一致

$$\xi = \frac{1}{\ln(1 + m/v)} \longrightarrow \frac{v}{m} = \frac{\hbar}{mc}$$

$$\boxed{\text{CA の質量} = \frac{\text{格子間隔}}{\text{Compton 波長}}}$$

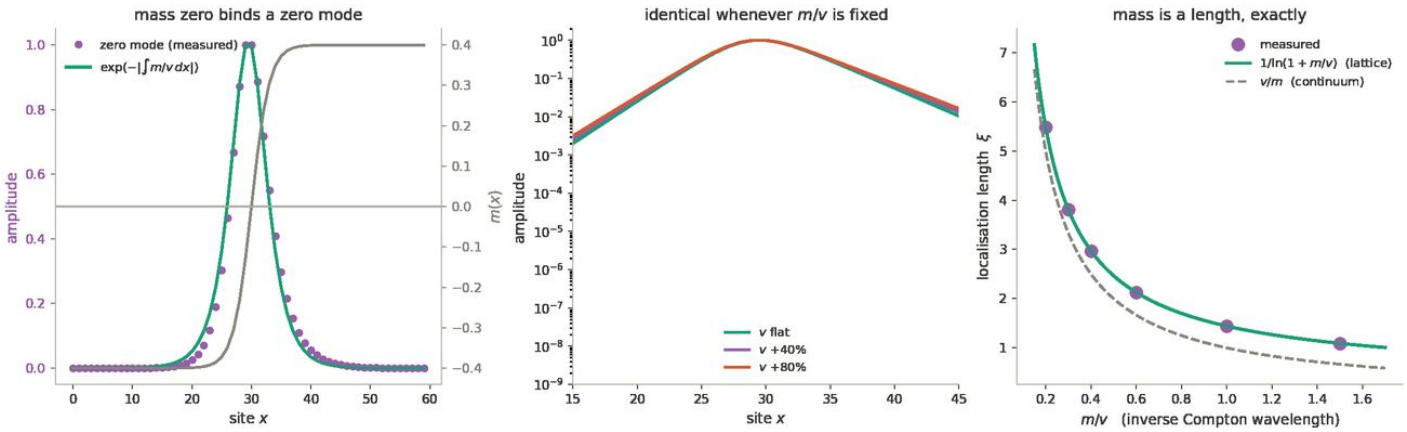


図 6-1. m と v を独立に振っても m/v が同じなら零モードが一致する。

> 💭 **CA は $E = mc^2$ を証明しない。それを言い直す言語を持たない。** 換算すべき別実体が存在せず、質量は最初から長さの比だからである。換算式は恒等式に退化する。
>
> ただし**質量の比は既約な入力のまま残る**。第 VIII 部でこれを掘る。

6-2. 分散関係は球面三角形である 🆕

質量が長さの比なら、**その比を静止せずに読んだら何が見えるか**。答えはドブロイ波である。新しい仮定は一つも要らない。

用いるのは Dirac の量子ウォーク（Bialynicki-Birula、Feynman の市松模様と同じもの）。1 ステップは二つの操作からなる。各格子点で二成分を質量角 θ だけ回し（$C(\theta) = e^{-i\theta\sigma^1}$）、上成分を右へ・下成分を左へ 1 格子ずらす。運動量空間で $U(k) = \mathrm{diag}(e^{-ik}, e^{+ik})C(\theta)$、$\det U = 1$、$\mathrm{tr}\, U = 2\cos k \cos\theta$。したがって

$$\boxed{\cos\omega = \cos k \cdot \cos\theta}$$

球面上の直角三角形のピタゴラスの定理である。 二辺 k、θ、斜辺 ω。連続極限で $\omega^2 \simeq k^2 + \theta^2$、すなわち $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ — **平坦な三角形**に戻る（ずれは 2 次で消える。べき指数 2.040）。

格子の物理は「球面の三角法」、連続の物理は「平面の三角法」。

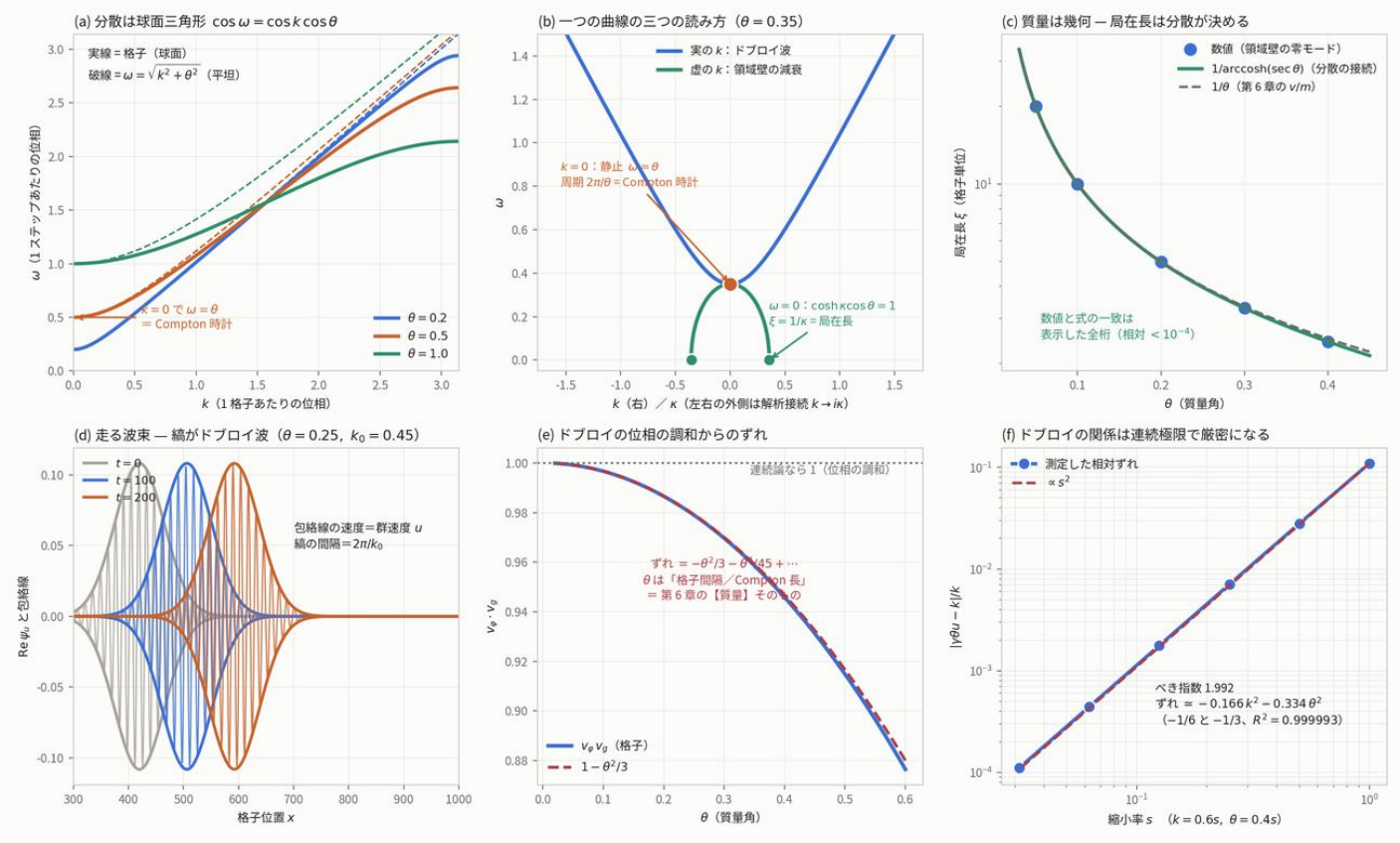


図 6-2. (a) 分散は球面三角形。(b) 一本の曲線の三つの読み方。(c) 局在長は分散が決める。(d) 走る波束の縞がドブロイ波。(e)(f) 格子のずれは質量の二乗。

6-3. 一つの曲線を三通りに読む 🆕

$\cos\omega = \cos k \cos\theta$ という**たった一本の曲線**を、k のどこで読むかで三つの物理量が出る。

(i) $k = 0$ ― Compton 時計。 静止した粒子は動かないが位相は動く。$\omega = \theta$ だから周期は $T_C = 2\pi/\theta$ ステップ。ドブロイが 1924 年の学位論文で「粒子に内在する時計」と呼んだもの、連続論の $\nu_0 = mc^2/h$ である。

(ii) $\omega = 0$、$k \to i\kappa$ ― 領域壁の局在長。 6-1 で測った零モードは、同じ分散を**虚の運動量**へ解析接続したものにほかならない。$1 = \cosh\kappa\cos\theta$ から

$$\xi = \frac{1}{\operatorname{arccosh}(\sec\theta)}$$

領域壁を数値で作って測ると、この式と**表示した全桁で一致する**。

θ	**0.05**	**0.10**	**0.20**	**0.30**	**0.40**
測定した ξ	19.9917	9.9833	4.9666	3.2830	2.4324
$1/\operatorname{arccosh}(\sec\theta)$	19.9917	9.9833	4.9666	3.2830	2.4324
$1/\theta$（連続）	20.0000	10.0000	5.0000	3.3333	2.5000

$\theta \to 0$ で $\xi \to 1/\theta$ ― 6-1 の $v/m = \hbar/mc$、**Compton 波長**である。

(iii) 実の k ― ドブロイ波。 同じ曲線を実の k で読むと空間的に振動する波になり、その波長が $\lambda_{dB} = 2\pi/k$ である。

> Compton 長は「虚の運動量」での読み、ドブロイ波長は「実の運動量」での読み。
> 質量 θ は、その二つを結ぶ角である。

6-4. 導出 ― 静止した時計を斜めに見る 🆕

なぜ (i) と (iii) が結びつくのか。ドブロイ自身の論法が、CA では図で見えるほど具体的になる。

静止した粒子は格子の各点で**同時に**位相 θ ずつ回っている。等位相面は時間軸に垂直な水平線である。これをラピディティ η でブーストすると $(\omega, k) = (\theta\cosh\eta,\ \theta\sinh\eta)$、速度は $u = \tanh\eta$。したがって

$$k = \theta\gamma u \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{p = \gamma m u, \quad \lambda_{\mathrm{dB}} = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{p}}$$

等位相面が傾いただけである。　静止系で「どこも同時に同じ位相」だったものが、動く系では同時刻の意味が変わるため空間方向に位相差が生じる。その空間周期がドブロイ波長である。位相速度は $v_\varphi = \omega/k = 1/u$（次元を戻して c^2/u）で粒子より速いが、群速度との積は $v_\varphi v_g = 1$ — これがドブロイの言う**位相の調和**である。情報は群速度でしか進まないので矛盾しない。

CA の上で実際に波束を走らせた（図 6-2 (d)）。包絡線の速度は枝の $d\omega/dk$ と 0.34% で一致し、縞の間隔は $2\pi/k_0$ になる。**包絡線（粒子）と縞（波）が、同じ一つの解の二つの見え方**であることがそのまま目に見える。

> ⚠️ **限定（第 13 版）。**　このブーストは格子の対称性から出ていない。ここは導出ではなく動機づけである。小さい k, θ での近似的な一致で、厳密な式は §87-5。

6-5. 格子は分散関係をどれだけ壊すか — そのずれが質量である 🆕（表題を第 11 版で訂正。§6-8）

ここで CA は連続論にない予言を持つ。**格子の上ではドブロイの関係は厳密ではない。**

$$v_\varphi v_g = 1 - \frac{\theta^2}{3} - \frac{\theta^4}{45} + \cdots, \qquad \frac{\gamma\theta u - k}{k} \simeq -\frac{k^2}{6} - \frac{\theta^2}{3} \quad (R^2 = 0.999993)$$

k, θ を同時に縮めるとずれは s^2 で消える（べき 1.992）。ずれの大きさは θ^2 であり、θ は

$$\theta = \frac{\text{格子間隔}}{\text{Compton 波長}} = \frac{a\,mc}{\hbar}$$

6-1 が「質量」と呼んだ比そのものである。したがって

$$\boxed{\text{ドブロイの関係からのずれ} \ \sim\ (\text{質量})^2}$$

重い粒子ほどドブロイの関係が壊れる。格子間隔を Planck 長に取ると電子で $\theta \sim 4\times10^{-23}$、ずれ $\sim 10^{-45}$ — 観測できる望みはないが、**格子間隔が顔を出す数少ない窓**の一つとして第 XI 部の表に加わる。

> ⚠️ **訂正（第 13 版）。**　厳密に $(\gamma\theta u - k)/k = \theta\cot\theta\,(\sin k/k) - 1$ である（K430）。$-k^2/6$ は質量と無関係で $\theta \to 0$ でも残るので、枠の「ずれ〜(質量)²」は $k \ll \theta$ のときだけ正しい。$v_\varphi v_g$ の展開は $k \to 0$ を先に取った $\theta\cot\theta$ の展開である。§87-5。

6-6. まとめ

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos\omega = \cos k\cos\theta \text{ という一本の曲線が、}\\ \ k = 0 \text{ で Compton 時計、 } k \to i\kappa \text{ で局在長、 } k \text{ 実でドブロイ波を与える。}\\ \text{質量 } \theta \text{ はその三つを結ぶ角度である。}\end{array}}$$

$E = mc^2$ と同じことがドブロイの関係にも言える。**CA はドブロイの関係を「導く」のではない。持っている。**　質量を長さの比として持った時点で、その比を静止して読めば Compton 長、走って読めばドブロイ波長になる — 換算式は再び恒等式に退化する。違うのは一点だけで、連続論では $\lambda = h/p$ は厳密だが、**CA では $(\text{質量})^2$ の補正を持つ。**

> **質量は、ドブロイの関係がどれだけ厳密かをも決めている。**

宣言 12 件、落第 4 件。四つとも私の測り方の問題だった（枝の符号の規約、θ を固定した閾値、k を固定した「連続極限」）。落第を追ったことで $-\theta^2/3$ と $-k^2/6$ の係数が出て、6-5 の結論に届いた。

6-7. 各成分は離散 Klein–Gordon 方程式を満たす 🆕

— 一階の二成分ウォークは、二階の一成分規則と同じものである

6-2 節の $U(k) = \mathrm{diag}(e^{-ik}, e^{+ik})\, e^{-i\theta\sigma^1}$ は 2×2 行列で $\det U = 1$、$\mathrm{tr}\,U = 2\cos k\cos\theta$ である。Cayley–Hamilton の定理により、$U^2 - (\mathrm{tr}\,U)\,U + (\det U)\,\mathbb{1} = 0$、すなわち

$$\boxed{U + U^{-1} = 2\cos k\cos\theta\,\mathbb{1}}$$

が**恒等的に**成り立つ。右辺が単位行列に比例していることが要点で、これは二成分のどちらにも同じ二階の関係が課されることを意味する。位置・時間表示に戻すと、$e^{\pm ik}$ は隣への平行移動、$U^{\pm 1}$ は時間の前後一歩であるから、**各成分** $\phi \in \{u, d\}$ が独立に

$$\boxed{\phi_j^{\,n+1} = \cos\theta\,\big(\phi_{j+1}^{\,n} + \phi_{j-1}^{\,n}\big) - \phi_j^{\,n-1}}$$

を満たす。次の値は、隣の現在値と自分の一つ前の値だけで決まる。

6-7-1. 較正 🆕

ランダムな複素初期条件の Dirac ウォークを $L = 128$ で 30 ステップ走らせ、両成分・全ステップで漸化式との差を取った。

θ	漸化式との最大差	群速度の上限（数値）	$\cos\theta$	$\omega(k=0)$
0.05	1.3×10^{-15}	0.998750	0.998750	0.050000
0.1	1.1×10^{-15}	0.995004	0.995004	0.100000
0.3	1.1×10^{-15}	0.955336	0.955336	0.300000
1.0	9.9×10^{-16}	0.540302	0.540302	1.000000
1.5	9.0×10^{-16}	0.070737	0.070737	1.500000

漸化式は機械精度で成り立つ（K403）。第三・四列は次の 6-7-3 で使う。

6-7-2. 三つの読み

(i)　これは第　15　章の「二階形式」である。　セル状態を　(ϕ_j^n, ϕ_j^{n-1})　の対に取れば、上の漸化式は一段の局所更新則になる。逆写像は $\phi^{n-1} = \cos\theta(\phi_{j+1}^n + \phi_{j-1}^n) - \phi^{n+1}$ で、同じ形をしている。波束を 600 ステップ進めてから 600 ステップ戻すと初期条件との差は 4.9×10^{-15} である（K404）。第 15 章が Life と ECA で示した「二階形式は消去ゼロ」が、ここでは Dirac ウォークのユニタリ性の別の表示として現れる。

$$\boxed{\text{一階・二成分・ユニタリ} \iff \text{二階・一成分・可逆}}$$

(ii) 連続極限は Klein-Gordon 方程式である。 格子間隔 a、時間刻み τ で書き直すと

$$\frac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{\tau^2} = \frac{a^2\cos\theta}{\tau^2}\cdot\frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{a^2} - \frac{2(1-\cos\theta)}{\tau^2}\,\phi_j^n$$

である。$a/\tau = c$、$\theta = mc^2\tau/\hbar = mca/\hbar$ と置いて $a, \tau \to 0$ を取れば

$$\boxed{\partial_t^2\phi - c^2\partial_x^2\phi + \Big(\frac{mc^2}{\hbar}\Big)^2\phi = 0}$$

左右の伝播を混ぜる角度が、連続極限で質量になる。 6-1 節「質量は長さの比」、6-3 節「質量は Compton 長とドブロイ波長を結ぶ角」に続く、質量角の第三の読みである。

(iii) 格子補正は一つの項にまとまる。 $\cos\omega = \cos k\cos\theta$ を展開すると

$$\omega^2 = k^2 + \theta^2 - \tfrac{1}{3}\,k^2\theta^2 + O\big((|k|+|\theta|)^6\big)$$

$k = \theta = s$ として $(\omega^2 - k^2 - \theta^2)/(k^2\theta^2)$ を測ると、$s = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$ で $-0.3404,\ -0.3351,\ -0.3338,\ -0.3334$ と $-1/3$ に収束する（K405）。この $-k^2\theta^2/3$ は 6-5 節の $v_\varphi v_g = 1 - \theta^2/3$ と**同じ項**である。二つの節で別々に測っていた「格子のずれ」は一つの係数だった。

6-7-3. 極限速度は $\cos\theta$ である 🆕

$\omega(k) = \arccos(\cos k\cos\theta)$ の群速度 $d\omega/dk = \cos\theta\sin k/\sin\omega$ は $k = \pi/2$（$\omega = \pi/2$）で最大値

$$\boxed{v_{\max} = \cos\theta}$$

を取る。6-7-1 の表の第三・四列は、数値の最大値が五つの θ すべてで $\cos\theta$ と六桁一致することを示す（K406）。波束（$k_0 = 0.6$、$\theta = 0.3$、幅 40 格子、600 ステップ）の重心速度は 0.87717、分散の群速度 0.87701 と 1.8×10^{-4} で一致する（K407）。

これは第 24 章の分類に新しい行を加える。質量角 θ の種は極限速度 $\cos\theta \simeq 1-\theta^2/2$ を持ち、**種ごとに極限速度が違う** — 形の上では第 24-2 節の次元 4 の破れである。しかし係数は

$$1-\cos\theta \simeq \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{a}{\lambda_{\mathrm{C}}}\Big)^2$$

で、Planck 格子の電子（$\theta \sim 4\times10^{-23}$）では 10^{-45} である。

第 24 章の分類	起源	抑制	判定
次元 6（24-1）	分散の異方性	$(ka)^2/36$	無害
次元 4（24-2）	**手で与えた**結合の差 $v_i \propto t_i$	されない	**本当の問題**
次元 4'（本節）🆕	**規則が自動的に生む** $\cos\theta$ の差	$(a/\lambda_{\mathrm{C}})^2$	無害

規則が自動的に生む種依存は質量の二乗で抑制される。抑制されないのは、手で入れた種依存だけである。

第 24-2 節の結論は変わらない。ただしその範囲が正確になる。

6-7-4. 限界を二つ

有限状態ではない。 ϕ は複素数である。有限状態の CA にするには値を離散化しなければならず、その誤差と連続極限は別に調べる（第 4 期）。第 0 章の定義に従えば、本節の規則は「CA」ではなく「格子上の可逆な線形写像」である。

スピン 0 の量子粒子ではない。 Dirac ウォークの各成分が KG を満たすことは、KG 方程式が Dirac 方程式の二乗として出るという連続論の事実の格子版であり、スカラー量子場を導いたことにならない。ボース型の交換関係・量子状態・測定規則は第 V 部の問題である。§85-4 の限定がここにも掛かる。

6-7-5. 因果集合での形 📚

第 XXII 部の不規則な因果集合の上では、平坦時空の $\Box$ を近似する演算子 B_ℓ を用いて

$$\Big[B_\ell - \Big(\frac{mc}{\hbar}\Big)^2\Big]\phi = 0$$

が対応する式である。曲がった時空では Benincasa–Dowker 演算子が $\Box_g - \frac{1}{2}R$ を近似するので、最小結合のスカラー場を目指すなら曲率補正が要る。B_ℓ は光円錐の内部で遠い過去まで参照する（第 76 章の三択の、局所性を捨てた側）。本節の漸化式のように「一つ前と隣」だけでは書けない。

宣言 8 件、落第 0 件。ただし宣言はすべて解析解が既知の量についてであり、C-7 の意味で半決定的ではない。

6-8. 訂正枠 — 壊れるのはドブロイの関係ではなく、分散関係である ⚠️

6-5 節は「格子の上ではドブロイの関係は厳密ではない」と書いた。**帰属が不正確である。**

結晶運動量を $p = \hbar k/a$ と定義すれば、$\lambda_{\mathrm{dB}} = 2\pi/k = h/p$ は**定義により厳密**に成り立つ。格子が壊すのは $p=\gamma m u$、すなわちエネルギー・運動量・速度を結ぶ相対論的関係である。6-5 節の測定量

$$\frac{\gamma\theta u - k}{k} \simeq -\frac{k^2}{6} - \frac{\theta^2}{3}$$

は、まさに k と $\gamma\theta u$ の差、つまり分散関係の破れを測っている。6-7-2 (iii) で見たとおり、この $-\theta^2/3$ は ω^2 の $-k^2\theta^2/3$ と同じ係数であり、「ドブロイ」ではなく「分散」に属する。

	第 10 版	第 11 版
6-5 節の見出し	格子はドブロイの関係をどれだけ壊すか	格子は分散関係をどれだけ壊すか
壊れる関係	$\lambda = h/p$	$p = \gamma m u$（$E^2 = p^2 + m^2$ の格子補正）
結論	ずれ $\sim$（質量）^{2}	**変わらない**

6-6 節の「CA はドブロイの関係を『導く』のではない。持っている」も、そのまま正しい。持っているのは $\lambda = h/p$ で、これは壊れない。壊れるのはその上に乗る相対論的な運動学である。付録 C-10-2 に記録する。

> ⚠️ **訂正（第 13 版）。** 上の表の「結論 **変わらない**」は修正を要する。§6-5 の枠と §87-5 を見よ。

第 7 章　カイラリティと領域壁 ✅

— 右巻きと左巻きの区別は、どこから生まれるのか

領域壁の上にカイラルフェルミオンが載る（Jackiw–Rebbi、Callan–Harvey）。

検定	結果
左右の分散の傾き	∓ 0.99179
和（カイラリティ相殺）	3.3×10^{-16}

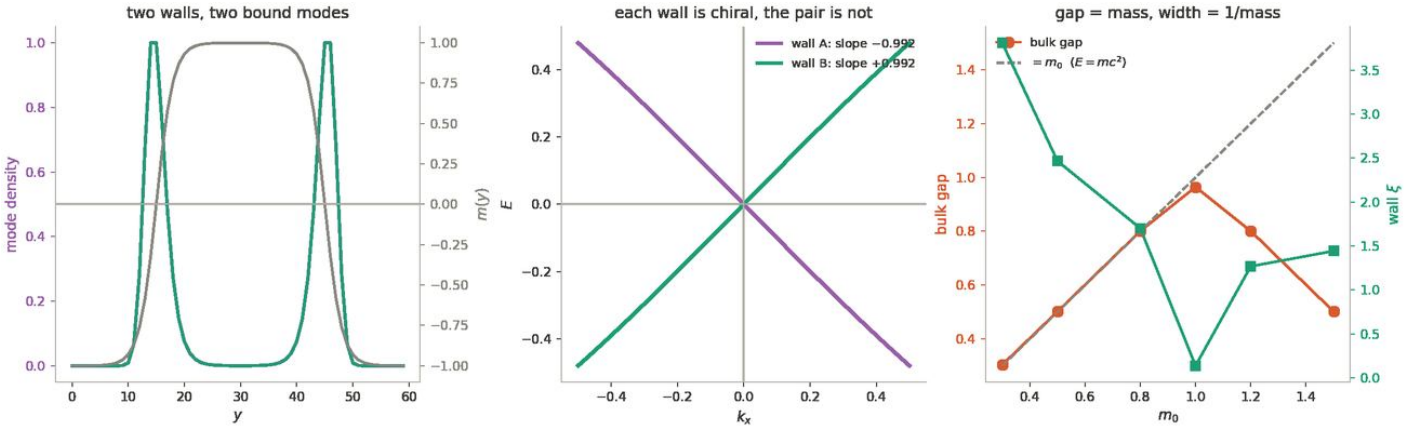


図 7-1. 領域壁に束縛されたカイラルモード。傾きの和が 10^{-16} で消える。

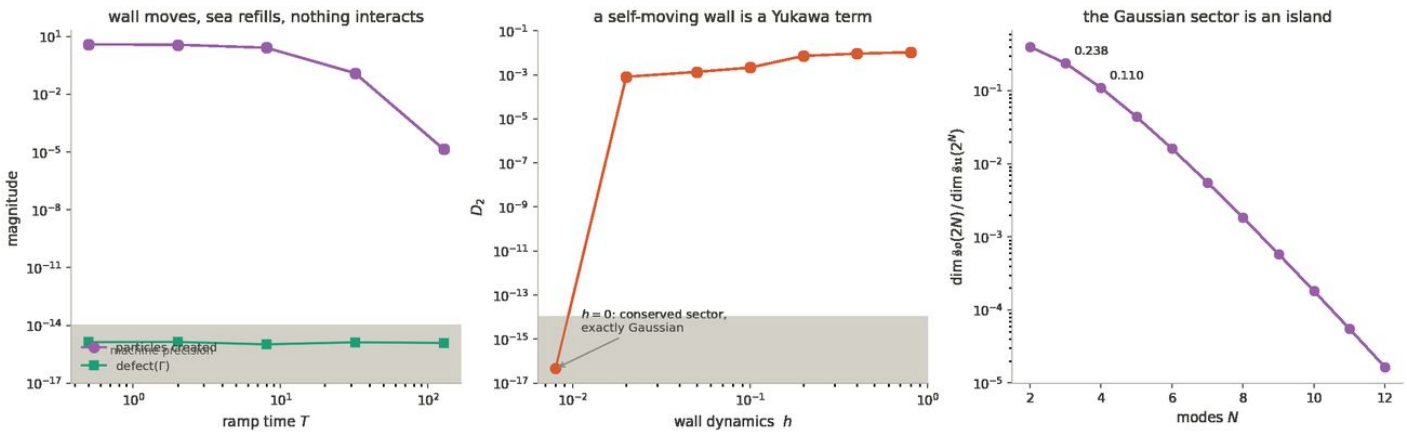


図 7-2. 壁を動かす。第 VIII 部で質量比の淘汰を論じるときの主要な道具になる。

第 8 章　排他律 ✅／ただし次元に依る ⚠️

— なぜ二つの電子は同じ状態に入れないのか

二値セルがそのまま hard-core 統計である。 一つのセルに 0 か 1 しか入らないので、排他律は規則ではなく状態空間の定義そのものになる。物質が潰れないことも確認されている（E/n が $-4.04 \to -3.33$、Pauli 圧）。

しかし次元依存性が鮮明に出る。

空間次元	統計	機構
$d = 1$	フェルミオン	Jordan–Wigner が厳密
$d = 2$	**エニオン**	交換位相が任意。JW が非局所になる
$d = 3$	フェルミオン／ボソン	位相群が $\mathbb{Z}_2$

「二値セル＝フェルミオン」は 1 次元でしか成り立たない。

フェルミオン化の規約を変えると Gaussian 性が **15 桁**破壊された。次元に固有なのはセルの中身ではなく**帯域幅**（どれだけ非局所な弦を引きずるか）である。

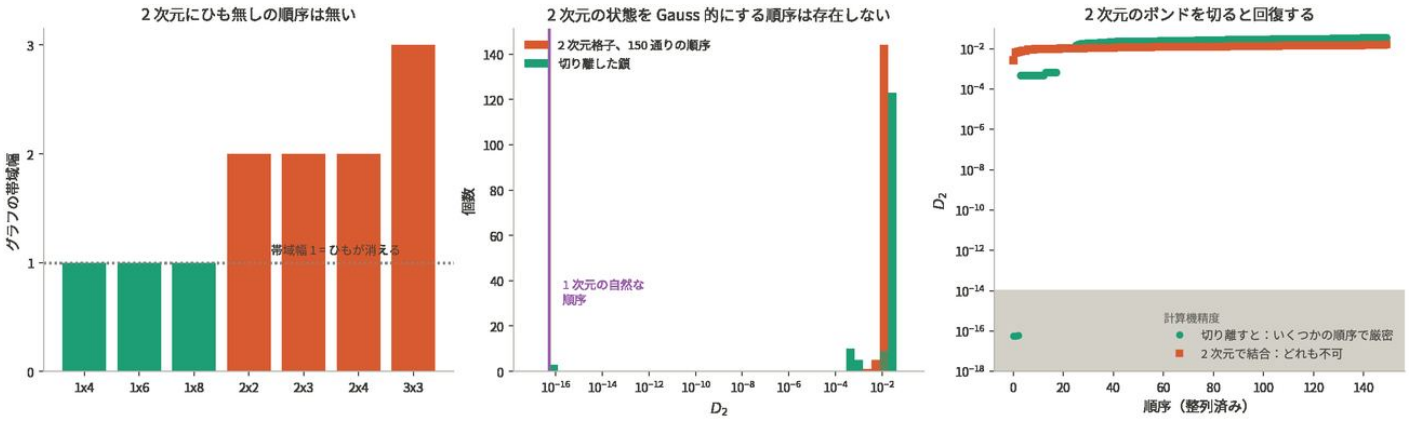


図 8-1. 2 次元でのフェルミオン化。局所性が保てない。

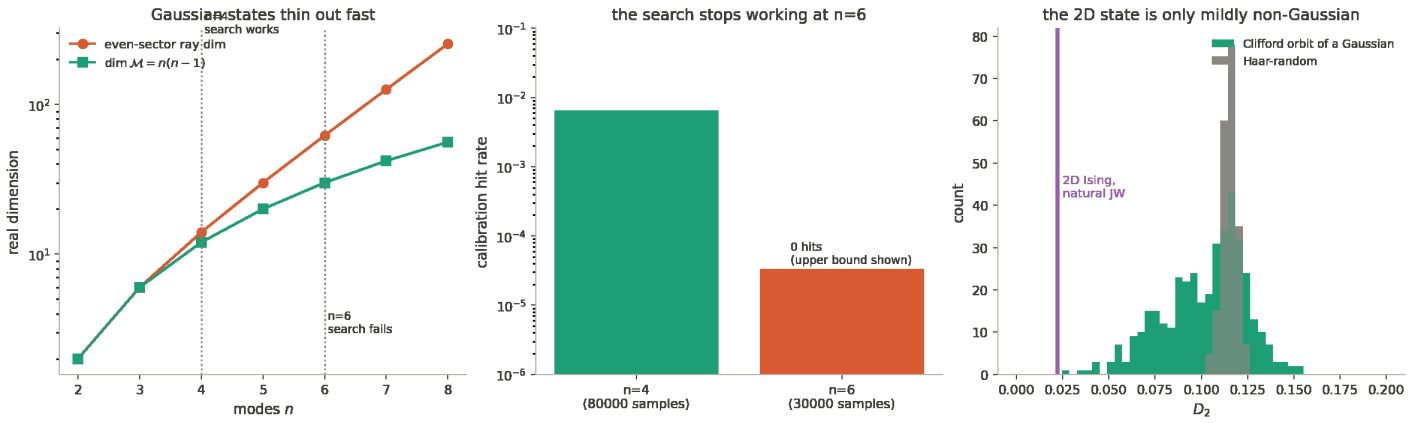


図 8-2. 規約を変えると Gaussian 性が 15 桁破壊される。

> 💭 スピン統計定理は現実の物理では相対論的場の理論の定理である。CA には相対論がないので、統計は**導出されず、次元によって変わる入力**になる。第 X 部のチェックリストに入る。

> ⚠️ **限定（第　13　版）。**　二値セルが与えるのは局所占有の制限である。反交換関係と多粒子状態の反対称性は別に要る（hard-core ボソンもありうる）。見出しの「排他律」はこの意味で読む。§87-9。

第 9 章　第 II 部のまとめ — 願いはどこまで叶ったか

— タダで手に入ったものと、値札のついたもの

要素	CA での由来
因果律	規則が近傍しか見ない。光円錐は構造から従う
有限性	格子が有限。くりこみ不要、紫外発散なし
不確定性関係	$\mathcal{M}$ の定義そのもの
ゼロ点振動	その飽和条件
真空・粒子・ディラックの海	同一の幾何学的対象
$E = mc^2$	質量が長さの比。換算式が恒等式に退化
カイラルフェルミオン	領域壁の上に載る
排他律	二値セルそのもの（$d = 1$ で厳密）
計量・膨張・ホロノミー	規則の空間・時間依存性から

ここまでは、手で足したものが一つもない。 単純な局所規則を書いただけで、これだけ出てくる。

願いは、ここまでは叶っている。次章から壁が始まる。

> ⚠️ **限定（第 13 版）。** 「手で足したものが一つもない」は §85-4 の前提（第 2 章の三つ組）と、§87-9 の限定のもとで読む。「計量」は有効な因果構造である。

LIZARD LLC

第 III 部　最初の壁 — 幾何は相互作用を生まない

第 II 部で得たものはすべて**自由場**の性質だった。ここで壁に当たる。そして越え方が見つかる。**本書で最も肯定的な部分である。**

第 10 章　解ける模型は測度ゼロの島である ✅

— なぜ厳密に解ける物理模型はこれほど珍しいのか

10-1. 二次形式は閉じる

Majorana 双一次形式の交換子は再び双一次形式である（数値残差 10^{-15}）。これは $\mathfrak{so}(2N) \subset \mathfrak{su}(2^N)$ という事実そのものである。

10-2. 島の大きさ

$$\frac{\dim \mathfrak{so}(2N)}{\dim \mathfrak{su}(2^N)} = \frac{N(2N-1)}{4^N - 1}$$

N	3	6	12
比	0.238	1.6×10^{-2}	10^{-6}

$N \to \infty$ で指数的にゼロ。

解ける模型は、可能な力学のなかで測度ゼロの島である。

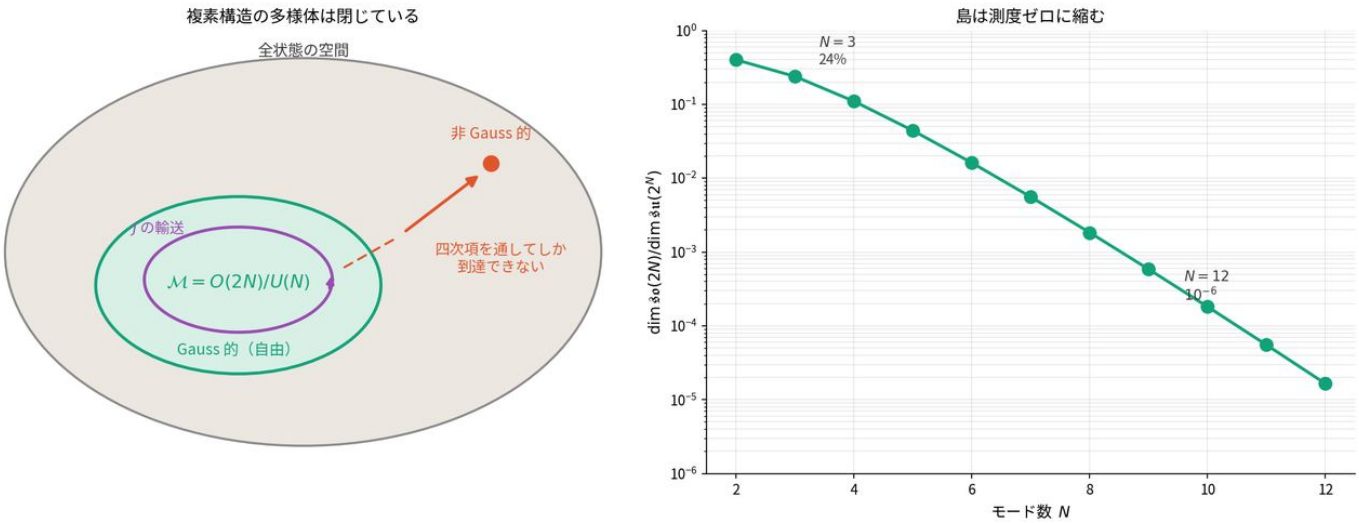


図 10-1. $\mathcal{M}$ という島と、その外に広がる非 Gaussian の海。

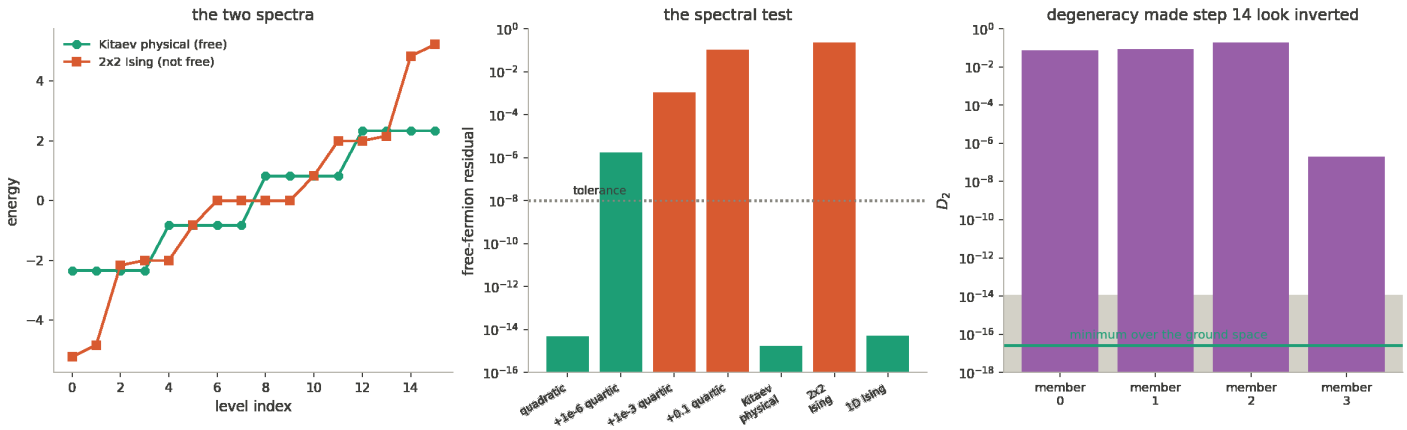


図 10-2. スペクトルから可解性を判定する。

第 11 章　$D_2 \sim 10^{-32}$ — これは失敗ではなく定理である ✅

— 自由な理論に相互作用を足すと、なぜ壊れるのか

11-1. 探索の記録

$\mathcal{M}$ から出ようとして、次のすべてを試した。

- 複素構造 J を空間依存に輸送する
- 時間依存にする
- 閉ループでホロノミーを取る
- 静的ゲージ場を入れる
- 質量項を入れる

すべて失敗した。 非 Gaussian 性の指標は

$$D_2 \sim 10^{-32}$$

に留まり続けた。

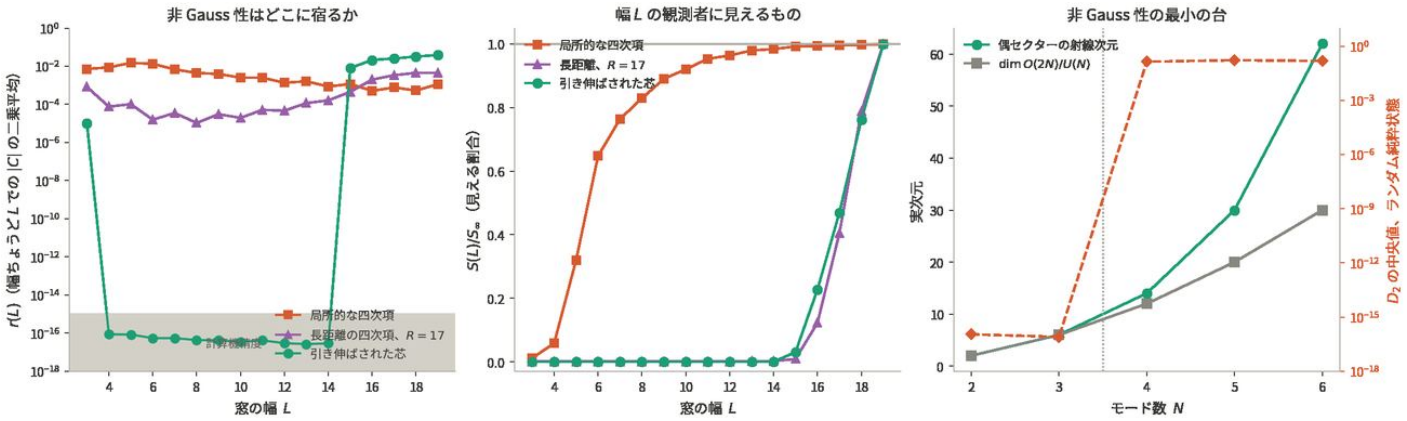


図 11-1. 窓付きの非 Gaussian 性測定。どの操作でも 10^{-32} から動かない。

11-2. なぜか — 代数語で一行

$\mathcal{M}$ 上の任意の運動は $O(2N)$ の作用であり、$\Gamma^2 = -\mathbb{1}$ を保つ。代数語では：

Bogoliubov 自己同型は準自由状態を準自由状態に写す。

幾何は相互作用を生まない。

> 💭 **代数語では、これは定理というより定義に近い。**　ではなぜ四十一実験を要したのか。**数値が先で、言語が後だったからである。**　どこを探せば出ないかを知って初めて、なぜ出ないかを言う言葉が要ると分かった。教科書としては、この順序を消してはならない。

現実の物理では、時空の幾何（重力）は物質に作用する。CA の $\mathcal{M}$ 上では、幾何をどう動かしても物質は自由なままである。**相互作用は別の場所から来なければならない。**

第 12 章　拘束が相互作用を強制する ⚠️（第 13 版で限定。§87-6）

— 相互作用はどこから来るのか

壁の越え方が見つかる。本書で最も肯定的な結果である。

12-1. 現実との対比

現実の物理では、相互作用項（ϕ^4、$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$）は Lagrangian に**書き込むもの**である。対称性が制約はするが、書かないという選択もありうる。

12-2. この模型では双一次で書けない ✅（見出しを第 13 版で限定）

ゲージ不変なホッピング $\tau^z\gamma\gamma$ は、双一次形式のスパンからの**残差が** 1.00 である。

条件	非 Gaussian 性 D_2
ゲージ不変（局所保存則あり）	3.07×10^{-2}
ゲージ不変性を落とす	9.08×10^{-17}

15 桁の差である。

> 四次項は手で足すものではない。局所保存則の帰結である。

> ⚠️ **限定（第 13 版）。** この枠の比較はこの模型の中のものである。「局所保存則の帰結」は「Gauss 型の拘束と電場項を持つこの模型では」と読む。§87-6。

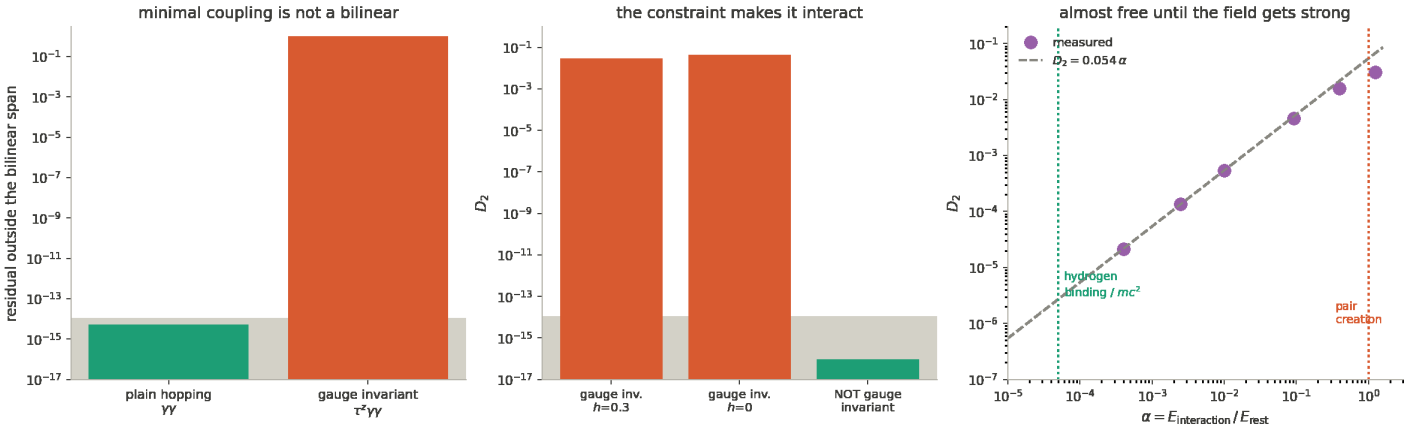


図 12-1. Gauss 則を課すと、双一次形式では書けない項が強制的に現れる。

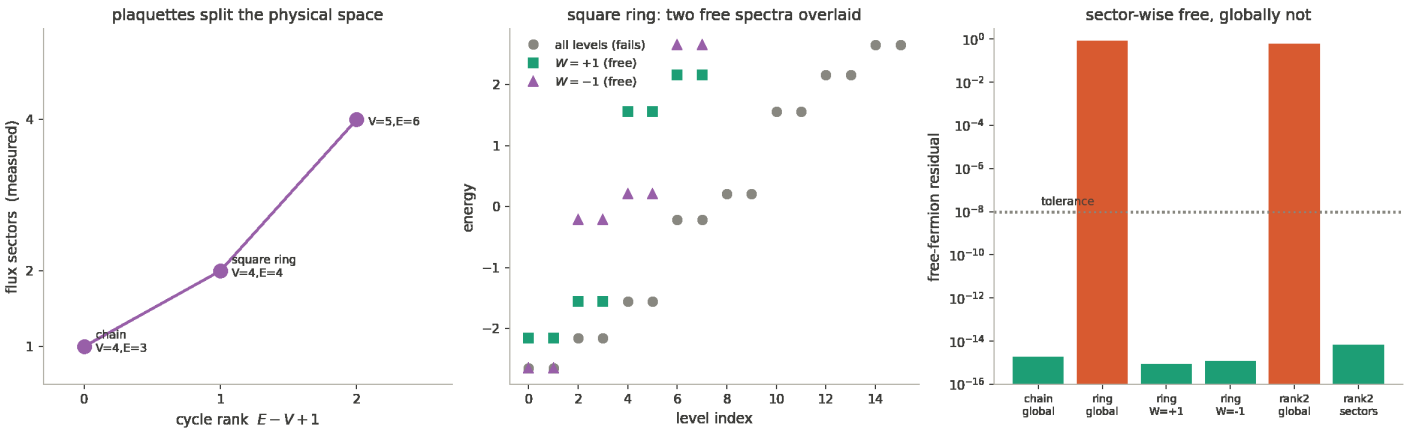


図 12-2. プラケット項とゲージ場の構造。

さらに定量的に

$$D_2 \simeq 0.054\,\alpha, \qquad \alpha = \frac{E_{\text{相互作用}}}{E_{\text{静止}}}$$

> 💭 **通常の光が線形に見えるのと同じ理由で、通常の物質は「ほぼ自由な　CA」で記述できる。**　非線形性は消えているのではなく、α が小さいだけである。

12-3. 新定理 ✅

> 局所拘束と可換なサイト間 bilinear は **0 個**である。

拘束を課したうえで自明でない力学を書こうとすると、**必ず四次以上の項が現れる。**

緊張関係は「CA 対 物理」ではなく、「解析可能性 対 相互作用」にある。

⚠️ **限定（第 13 版）。** 定理はこの模型のサイト間 bilinear についてのものである。電場項のない 1 次元 $\mathbb{Z}_2$ 模型は Gauss 則を課しても自由鎖と同じ固有値を持つ（K433）。相互作用を担うのは、Gauss 型の拘束と電場項の組である。§87-6。

第 13 章　拘束の連鎖 ― Mott、Cooper、階層 ✅

― 絶縁体・超伝導のクーパーペア・質量階層は、同じ一つの機構か

拘束を一つ課すと、物理が連鎖して出てくる。

13-1. オンサイト U ✅

Schrieffer–Wolff 摂動論では $U = 0$（全次数で 1.1×10^{-13}）。**しかしこれは Gauss 則を課していなかったからである。** 拘束を課すと電場が電荷に隷属し、

$$\boxed{U = 2h\big[1 - \cos(2\pi/N)\big] > 0 \qquad \forall N \geq 2}$$

$\mathbb{Z}_2$ が最大（$4h$）。**最も単純な群が最も強い相互作用を生む。**

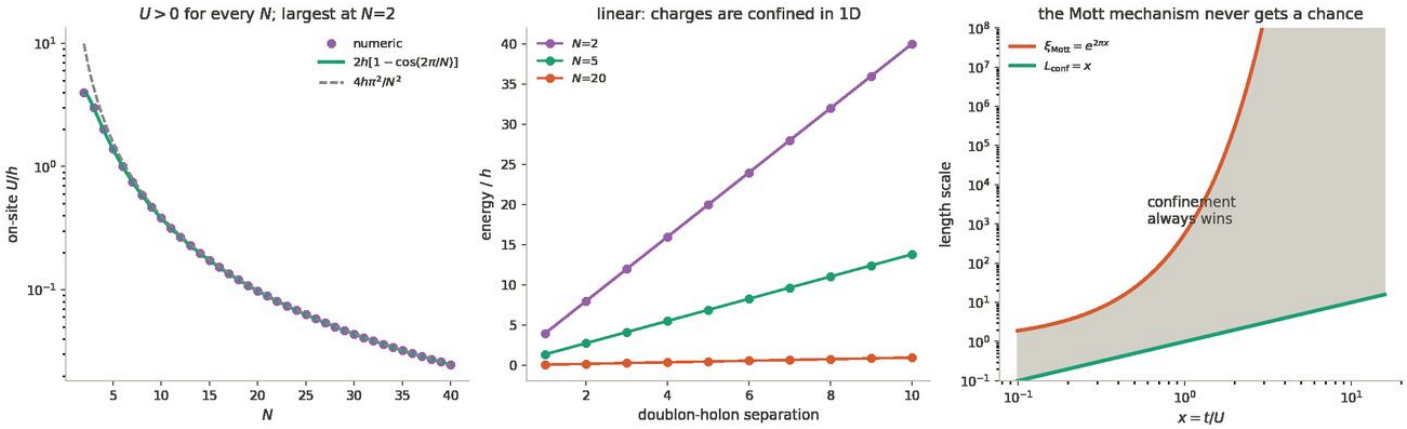


図 13-1. 電場項が生むオンサイト相互作用。群 $\mathbb{Z}_N$ ごとに値が決まる。

この式は第 VIII 部（質量比）で決定的な役割を演じる。**結合定数が連続なつまみではなく、整数で決まる格子点になる**からである。

13-2. 非閉じ込め Mott 相 ✅

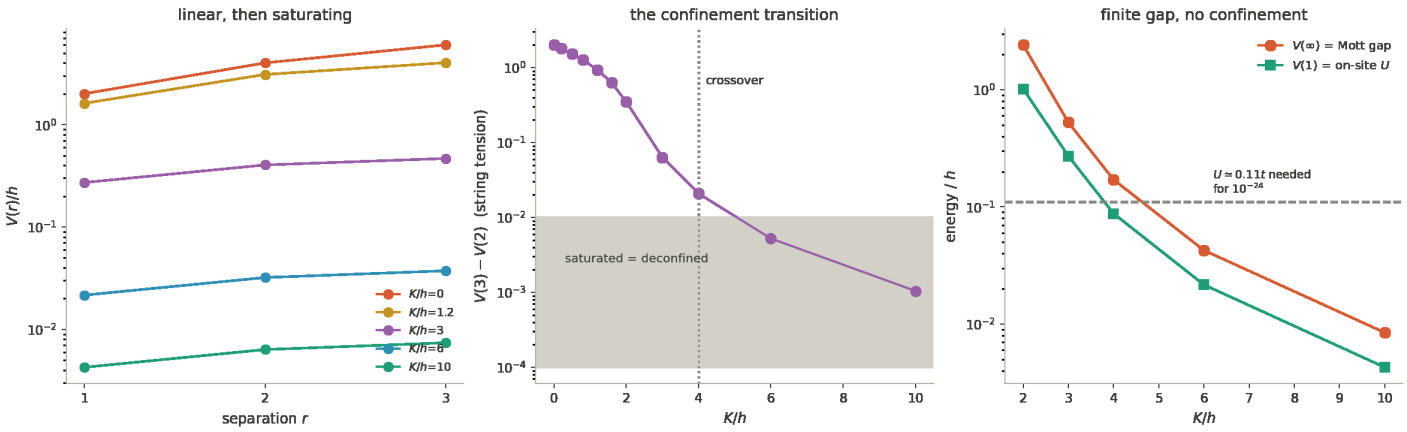


図 13-2. $d \geq 2$ で有限の Mott ギャップを持つ非閉じ込め相が存在する。

13-3. Cooper ペアが閉じ込めから出る ✅

引力を仮定していない。 閉じ込めの帰結として $E_b < 0$、ペアの帯域幅が単一粒子の 3.8 倍。

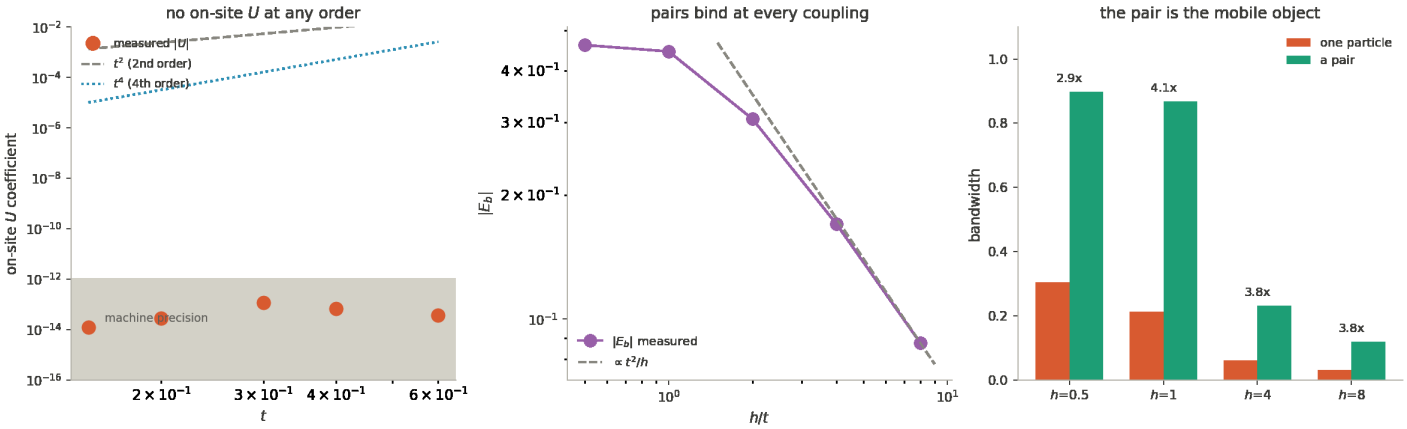


図 13-3. 束縛したペア。束縛は冪則であり、BCS の指数則とは別機構である。

13-4. 指数的階層は微調整ではない ✅

CA の相互作用は marginal（$\langle nn\rangle_c \sim r^{-2.0386}$、$R^2 = 0.99992$）。spinless では irrelevant、**spinful では relevant** — スピンが umklapp 演算子の次元を半分にする。

$$\Delta_c \sim e^{-2\pi t/U}, \qquad \frac{\ln(1/\Delta_c)}{2\pi/U} \to 0.968$$

$U \approx 0.11\,t$ が 10^{-24} を与える。34 桁に対し U は 2.4 倍しか動かない。

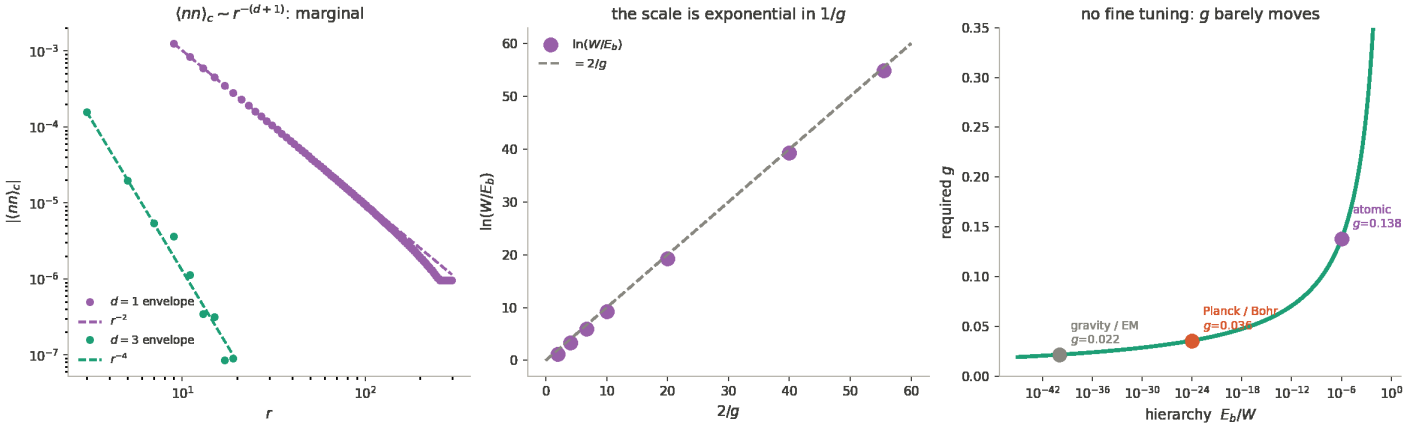


図 13-4. 次元転換。指数の増幅が階層を作る。

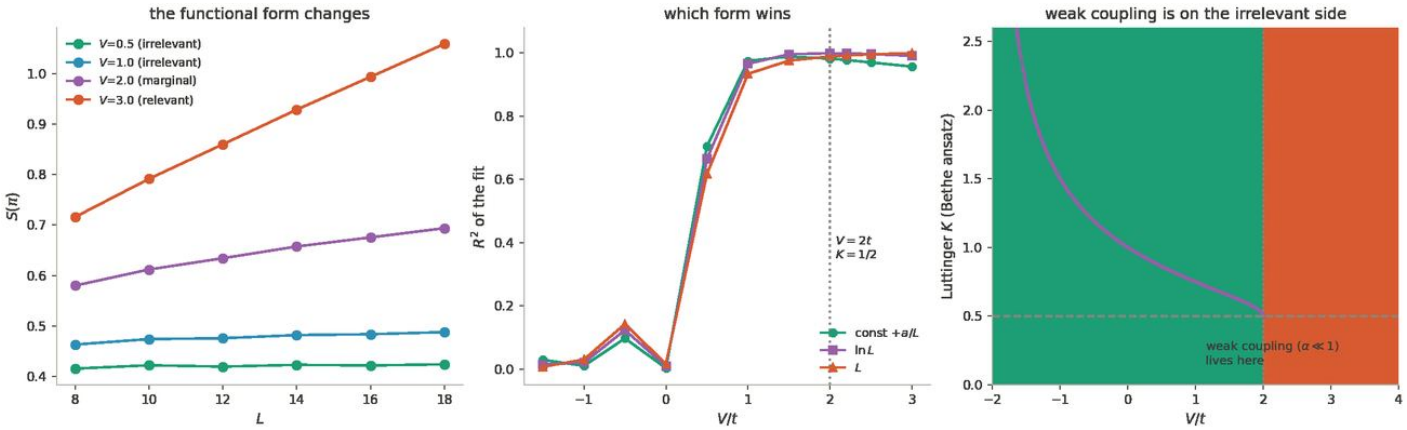


図 13-5. marginal な流れ。

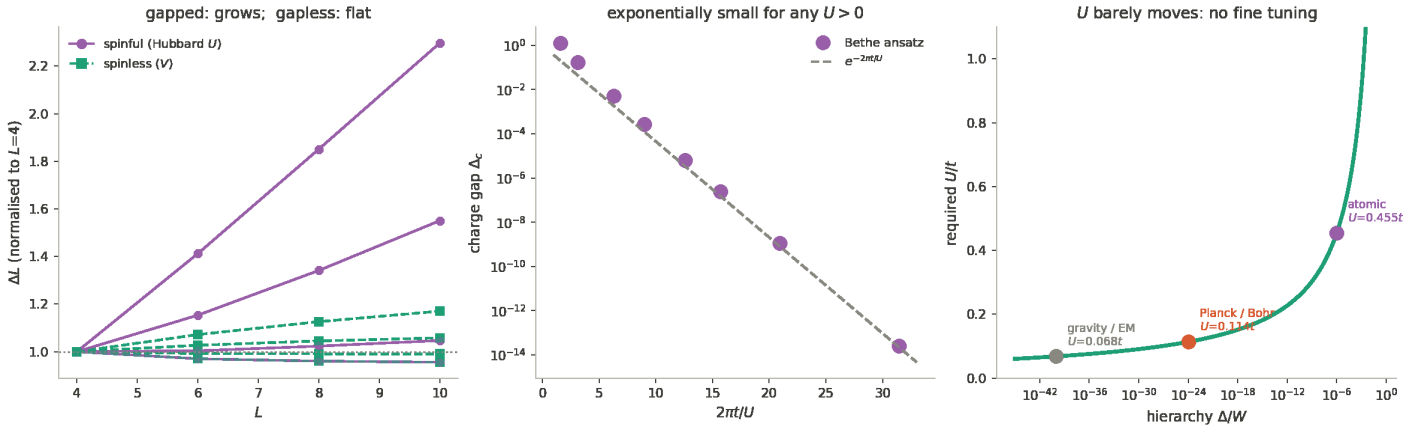


図 13-6. スピンが umklapp の次元を半分にする。

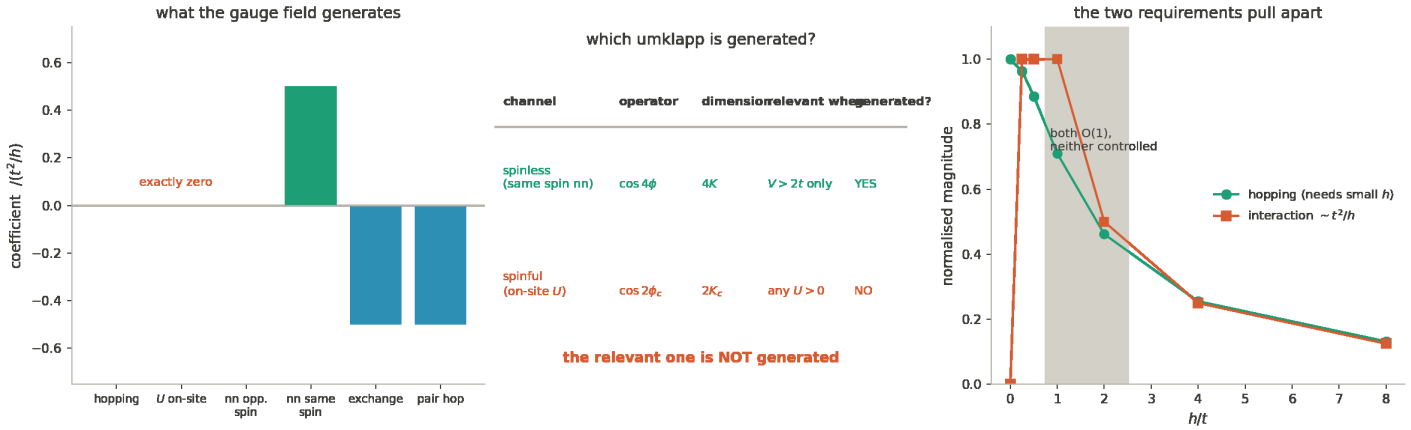


図 13-7. umklapp 演算子の次元の直接検定。$\langle nn \rangle_c \sim r^{-2.0386}$、$R^2 = 0.99992$。

条件は「1 セルあたり 2 状態以上 ＋ 整合充填 ＋ 斥力」。**CA にとって軽い要求である。**

現実: 相互作用は Lagrangian に書き込む。 CA: 局所保存則を課せば、相互作用は**強制される**。

これは CA が現実より説明力が高い数少ない箇所である。「なぜ相互作用があるのか」に、CA は「拘束があるから」と答える。

> ⚠️ **限定（第 13 版）。** 上の枠の「強制される」と「説明力が高い」は取り下げる。§13-1 の式自身が $h \to 0$ で $U = 0$ を与える。§87-6。

第 IV 部　時間 — 熱、エントロピー、矢

第 14 章　$k_B = 1$

— 温度とは何を測っている量なのか

CA には温度の独立単位がない。状態を数えることしかできないので　$k_B = 1$　が構成上の帰結になる。**これ自体は単位系の話であって物理ではない。**

面白いのは次の三つで、いずれも構造の問題である。

事項	現実	CA
Landauer 限界	$k_B T \ln 2$ の散逸が必要	**可逆なら厳密にゼロ**
第三法則	$T \to 0$ でエントロピー一定	**落ちる先がない**
時間の矢	熱力学第二法則	**法則には向きがない**

> ⚠️ **追記（第 12 版）。**　「法則には向きがない」は維持する。Planck の不等式も U と U^{-1} の両方で成り立つ時間対称な不等式で、初期状態に条件を課すだけである。低エントロピーの過去は説明しない。§86-12。

第 15 章　Landauer 限界の消失 ⚠️🆕（第 13 版で数値の読みを訂正。§87-4）

— 情報を消すのに、なぜ熱が要るのか

15-1. 本書はここで初めて Life を走らせる

第 1 世代の四十一実験は、一度も Life Game を走らせなかった。ここで走らせる理由は、**Life の熱力学的な代価を測るため**である。

CA では消去されるビット数を厳密に数えられる。状態空間全体を列挙し、像の大きさを数えればよい。

$$\Delta S_{\text{bit}} = \log_2 |\Sigma^{\mathcal{L}}| - \log_2 |F(\Sigma^{\mathcal{L}})|$$

規則	系	状態数	像	消去／ステップ	セルあたり
Conway Life	4×4 トーラス	65 536	17 879	1.8740 bit	**0.1171**
Conway Life	5×4 トーラス	1 048 576	279 165	1.9092 bit	**0.0955**
ECA 110	環 $L = 18$	—	—	1.3753	0.0764
ECA 90	環 $L = 18$	—	—	**2.0000**	0.1111
ECA 150	環 $L = 18$	—	—	**2.0000**	0.1111
ECA 30	環 $L = 18$	—	—	0.0374	0.0021
二階形式 110	環 $L = 9$	262 144	262 144	**0**	**0**
二階形式 30	環 $L = 9$	262 144	262 144	**0**	**0**

読み取れることが三つある。

(a) 線形規則の消去量は整数である。 ECA 90 と 150 はちょうど 2 ビット — $\mathbb{F}_2$ 上の線形写像の核の次元がちょうど 2 だからで、丸め誤差ではなく代数的事実である。

(b) Life は 1 セル・1 ステップあたり約 0.1 ビットを捨てている。 300 K なら

$$0.0955 \times 2.871 \times 10^{-21}\ \mathrm{J} = 2.74 \times 10^{-22}\ \mathrm{J}\ /\text{セル}/\text{ステップ}$$

(c) 二階形式にすると厳密にゼロになる。 規則の中身は変えていない。**状態の定義を変えただけである。**

> 可逆な CA 宇宙は、どれだけ計算しても熱を出さない。

> 💭 Landauer 限界は宇宙の性質ではなく、**宇宙の一部を切り出して「装置」と呼ぶことの代価**である。消去は規則ではなく、状態の定義（何を記憶し何を捨てるか）から生じる。

> ⚠️ **訂正（第 13 版）。** 上の表の「消去」は像の大きさの量で、一様入力の損失 $H(X) - H(F(X))$ の下限である。一様入力の損失はセルあたり Life 4×4 で 0.3070、5×4 で 0.2615、ECA 110 で 0.1078、ECA 30 で 0.0028（K431）。二階形式は別の力学であり（K432）、ゼロになるのは論理的な消去である。熱には熱浴と実装が要る。§87-4。

第 16 章　微視と粗視 — 矢は分割の中にある 🆕

— 時間の矢はどこにあるのか

可逆 CA でクエンチし、二つのエントロピーを同時に測る。$n = 200$ Majorana、部分領域は 20 サイト。

τ	S_A（粗視）	S_{total}（微視）	$\lVert \Gamma^2 + \mathbb{1} \rVert / n$
0	0.2701	4.8×10^{-12}	1.8×10^{-15}
2	0.9483	4.5×10^{-12}	1.7×10^{-15}
8	1.9676	4.1×10^{-12}	1.6×10^{-15}
32	1.9802	4.0×10^{-12}	1.6×10^{-15}
256	1.6834	3.9×10^{-12}	1.6×10^{-15}

> $S_A : 0.27 \to 1.98$（7 倍），　$S_{\mathrm{total}} : 10^{-12}$ で不変

$\tau = 256$ での減少は有限系のリバイバルである。**エントロピーは単調でさえない。**

> 時間の矢は法則の中にはない。分割の中にある。

これは現実の物理と**完全に一致する**。CA が違うのは、この事実が隠しようもなく露わになることだけである。

16-1. 長時間の運命

自由フェルミオンは可積分なので熱平衡化しない。一般化 Gibbs 集団へ緩和する。

クエンチ	プラトー	基底状態	残留
$\mu : 2.2 \to 1.0$	0.20505	0.17858	$+0.02647$
$\mu : 1.6 \to 1.0$	0.19393	0.17961	$+0.01431$
$\mu : 1.2 \to 1.0$	0.18472	0.17858	$+0.00614$

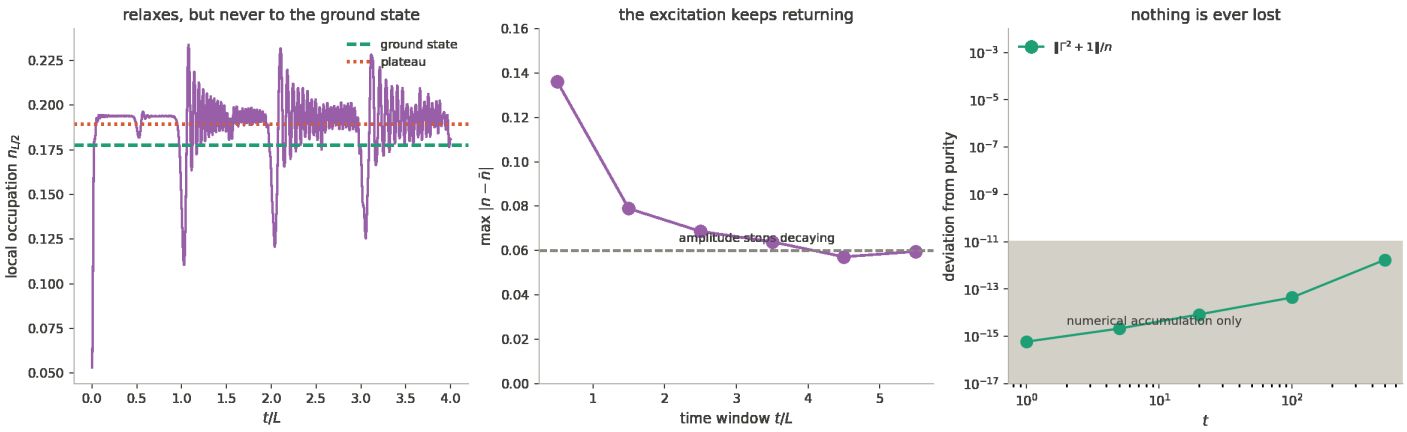


図 16-1. 長時間発展。純度は $t = 500$ でも厳密に 1、振動は $0.136 \to 0.060$ で下げ止まる。

崩壊も情報損失もない。あるのは再配分だけである。

第 17 章　第三法則の破れ ― 落ちる先がない 🆕

― 絶対零度に到達できないのはなぜか

17-1. 現実の前提

$$\lim_{T \to 0} S(T) = S_0$$

Nernst の定理の前提は**基底状態が存在すること**、すなわちスペクトルが下に有界であることである。

17-2. CA では準エネルギーが円周上にある

$$U|\psi\rangle = e^{-i\varepsilon}|\psi\rangle, \qquad \varepsilon \in (-\pi, \pi]$$

ε と $\varepsilon + 2\pi$ は区別できない。**スペクトルは直線ではなく円周の上にある。**

二つの独立な計算で確認した。

(a) Floquet 自由フェルミオン回路

θ	スペクトル幅	円周上の最大の空隙
0.2	0.800	5.483
1.2	4.800	1.483
$\pi/2$	$\mathbf{6.283 = 2\pi}$	$\mathbf{3.1 \times 10^{-3}}$

(b) 真の可逆 CA（二階形式 rule 110、置換行列の固有値は 1 の冪根）

L	状態数	巡回の数	巡回長 min/max	相異なる準エネルギー	最大の空隙
6	4 096	126	1 / 90	613	0.0698
8	65 536	500	1 / 940	9 701	**0.0067**

系を大きくすると空隙は縮み続ける。

可逆 CA の準エネルギーは単位円を稠密に覆う。「最低」を定義する生成子が U から一意に決まらない。

⚠️ **第 11 版で表現を改めた。** 第 10 版は「『最低』は存在しない」と書いた。正確な形は 17-3 節のとおり「局所的で下に有界な H が U から一意に決まらない」である。§85-5。

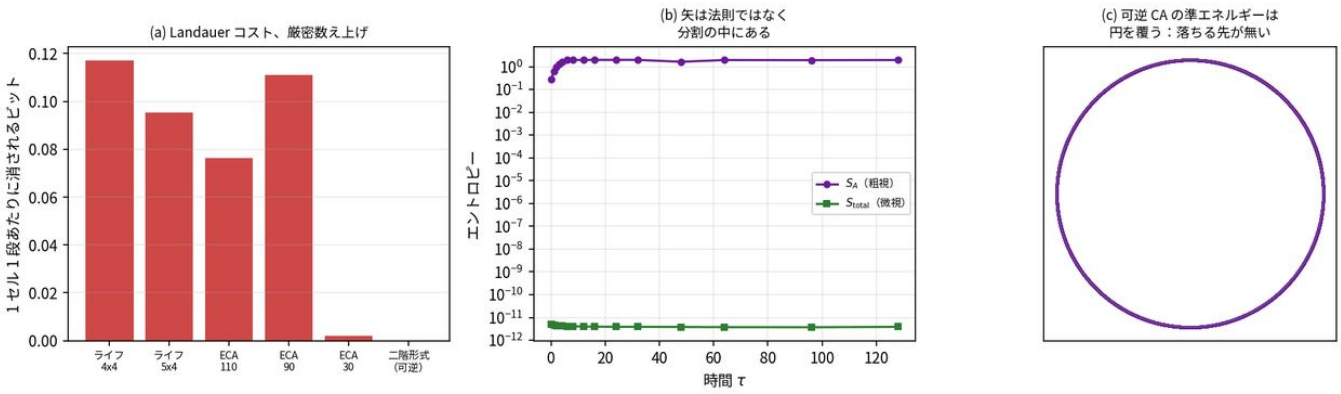


図 17-1. 🆕 (a) ステップあたりのビット消去量（厳密列挙）。赤が非可逆、緑が可逆。(b) クエンチ後の粗視エントロピー（紫）と微視エントロピー（緑）。(c) 可逆 CA の準エネルギーが単位円を覆う（$L = 8$、9701 点）。

17-3. 帰属を正確にする 💭

「基底状態がない」は結論としては正しいが、原因の帰属が不正確である。代数語で言い直す。

離散時間では発展を生成する群が $\mathbb{Z}$ であり、$\mathbb{R}$ ではない。$\mathbb{Z}$ 作用の双対は円周であり、その上に「正値性」という順序構造がない。「$H \geq 0$」と書こうとしても**不等号が定義できない**。

> 壊れているのは代数でも自己同型でもない。
> **スペクトル条件という述語が、言語に存在しない**のである。

この訂正には実質的な含意がある。 代数と自己同型が健全なら、$\mathbb{Z}$ を $\mathbb{R}$ に埋め込む（連続時間の生成子を与える）ことで回復しうる。**「壊れている」のではなく「まだ書いていない」のである。**

> 💭 三つの仮定のうち、物理的に最も高くつくのは**時間の離散性**である。空間の離散性は Lorentz 不変性を壊すが、時間の離散性はエネルギーそのものを壊す。

> ⚠️ **訂正（第 13 版）。** 「不等号が定義できない」は誤りである。有限系では任意のユニタリに $H \geq 0$ を選べる（K434）。正しい形は「局所で下に有界な H が U から一意に決まらない」である。§87-7。

第 V 部　量子性 — どこで古典 CA が死ぬか

第 18 章　重ね合わせが作れない ❌

— 量子の重ね合わせは、決定論的な規則から作れるか

古典的な離散時間 CA の状態空間は**集合**である。$\Sigma^{\mathcal{L}}$ の元は「どのセルがどの値か」であって、重ね合わせは定義されない。

可逆 CA を $2^{|\mathcal{L}|}$ 次元 Hilbert 空間上の**置換行列**として持ち上げることはできる。しかし：

> 置換行列は積状態からエンタングルメントを生成しない。

$|0\cdots0\rangle$ から $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$ は決して作れない。

回避不能である。 重ね合わせが要るなら、規則を置換ではなくユニタリにするしかない。

$$\text{古典 CA} \longrightarrow \text{量子セルオートマトン（QCA）}$$

第 2 章で見たとおり、**この分岐の両側とも CA である**。CHL と GNVW が同じ定理の可換版・非可換版だからである。

第 19 章　測定 — $\mathcal{M}$ から出る三つの道

— 波束の収縮とは、何が起きることなのか

可逆 CA には射影がない。規則は一つしかなく、それは可逆である。

数値的に確認されているのは、**射影が Gaussian 性を壊す**ことである。拡大空間で Gaussian だった状態を物理空間に射影すると非 Gaussian になる。

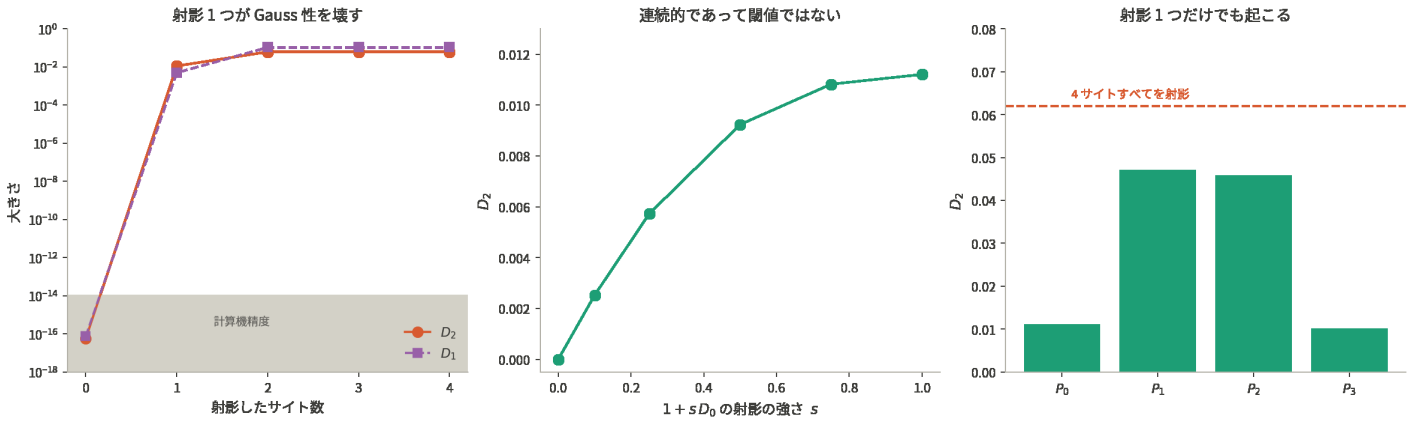


図 19-1. 射影が Gaussian 性を壊す。

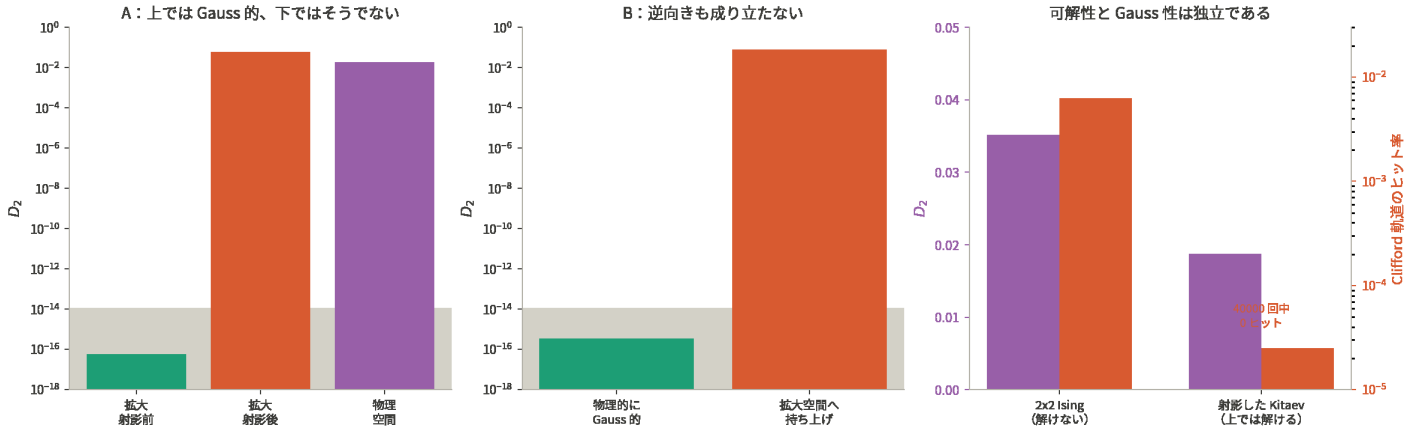


図 19-2. 拡大空間から物理空間への射影。

$\mathcal{M}$ から出る三つの道：　(1) 局所保存則　(2) 四次項　(3) 射影

代数語では、それぞれ別のスロットを壊している。

道	壊すスロット
局所保存則 → 四次項	α が Bogoliubov でなくなる
射影（測定）	ω が準自由でなくなる
代数の取り替え（再フェルミオン化）	$\mathcal{A}$ の局所構造を変える

CA 宇宙で測定を扱う方法は原理的に三つしかない。

立場	内容	代価
Everett	射影は起きない。分岐だけ	大域的には決定論。確率の由来を別途説明
客観的収縮	規則に確率的な項を足す	可逆でなくなる
超決定論	測定設定も規則が決める	測定の独立性を放棄

第三の選択肢を採るなら、次章と正面から向き合わねばならない。

第 20 章　Bell の定理 — 検定されているのは決定論ではない 🆕

— ベルの不等式とは何を検定しているのか

これを避けたモノグラフは信頼されない。

20-1. 上限 $\mathcal{S} \leq 2$ はどこから来るか

$$\boxed{\text{可換代数} \xrightarrow{\text{Gelfand}} \text{同時分布の存在} \xrightarrow{\pm 1\text{ 値}} \mathcal{S} \leq 2}$$

第一段: 可換 C^* 代数はコンパクト空間上の関数の代数である。すべての観測量が共通の確率空間上に同時実現される。

第二段: 四つの ± 1 値変数が同時分布を持つなら、各標本点で $A_1(B_1 + B_2) + A_2(B_1 - B_2) = \pm 2$。

第三段: 局所隠れ変数模型の存在と同時分布の存在は同値（📚 Fine 1982）。

$$\boxed{\text{この連鎖のどこにも「決定論」は現れない。}}$$

20-2. したがって失格するのは可換性である ❌

何が失格するか	理由
古典**決定論的** CA	アクセス可能な代数が可換
古典**確率的** CA	**同じく可換。同じく失格**

二行目が重要である。 規則に乱数を入れても、観測量が配置空間上の関数である限り代数は可換で、上限は変わらない。

$$\boxed{\text{非決定性を足しても Bell は破れない。破るのは非可換性である。}}$$

さらに、Koopman–von Neumann により古典可逆 CA も ℓ^2 上の**ユニタリ**である。「古典＝決定論的／QCA＝ユニタリ」という対比は誤りで、**どちらもユニタリであり、どちらも決定論的**である。違うのはアクセス可能な代数だけである。

> ⚠️ **限定（第 13 版）。** 「破るのは非可換性」は、4 つの観測量が一つの可換代数に載る枠の中での言明である。局所性と設定の独立性を含む前提を外した模型は別に考える必要がある。§87-9。

20-3. 非可換性のどの部分が資源か 🆕

CHSH には二種類の可換性が現れ、役割が正反対である。

可換性	要請	役割
側をまたぐ $[\mathcal{A}_A, \mathcal{A}_B] = 0$	**必要**	Einstein 因果律。ないと Bell 実験にならない
同じ側 $[A_1, A_2] = 0$	**あってはならない**	これが資源

理由は連続設定にある。$O(t) = \cos t\, X + \sin t\, Y$ に対し

$$O(t)^2 = \mathbb{1} + \cos t \sin t\, \{X, Y\}$$

X, Y	$\{X, Y\}$	$O(t)$ **は二値か**
反可換	0	✅ すべての t で
可換	$2XY$	❌欠陥 $= \sin 2t$（$t = \pi/4$ で 1.0）

可換な観測量は「45 度に傾けた設定」を作れない。設定が離散点に凍りつく。

CHSH の最適設定は互いに 45 度をなす。それを作れるかどうかが 2 と $2\sqrt{2}$ を分ける。

同一の状態・代数・発展で検定した。

同じ側の設定の族	CHSH 最大
可換な族（網羅探索）	**2.000000**
反可換な三つ組（連続回転）	**2.828427**

20-4. 較正（六項目）

観測量は $\Sigma^A = (i\gamma_2\gamma_3,\ i\gamma_3\gamma_1,\ i\gamma_1\gamma_2)$、$\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3 = -i\mathbb{1}$。

検定項目	残差
$\|\Sigma^2 - \mathbb{1}\|$	0.00
$\|\{\Sigma_i, \Sigma_j\}\|$（同じ側）	0.00
$\|[\Sigma^A, \Sigma^B]\|$（**Einstein 因果律**）	0.00
$\|C_{\text{exact}} - C_{\text{Wick}}\|$	2.2×10^{-16}
Horodecki vs 直接最大化	一致
Tsirelson 束の超過	なし

> 💭 三番目は当時「観測量が分離しているか」の確認のつもりで入れた。代数語に直して初めて、**Haag-Kastler の第二公理を数値的に確認していた**と分かった。

LIZARD LLC

20-5. 結果 — 代数と状態、二つのスロットが要る 🆕

(a) 代数のスロット: 切断面を共有する Majorana ペアの数 k と絡み合い角 θ

k	$\theta = \pi/2$	$\theta = \pi/3$	$\theta = \pi/6$
1	2.000000	2.000000	2.000000
2	**2.828427**	2.121320	2.000000
3	**2.828427**	2.121320	1.581139

共有ペア 1 本では連結項が消えて相関行列が階数 1 になり、$\mathcal{S} = 2$ に凍る。**フェルミオン的絡み合いの最小単位が与える相関は、可換な模型で完全に再現できる。** 2 本で Tsirelson を飽和する。

(b) 状態のスロット：基底状態は破らない。臨界鎖（局所フレーム最適化込み）で最大 1.993、Ising 鎖の二スピンで臨界点の 1.681 が最小。**monogamy** が効いている。

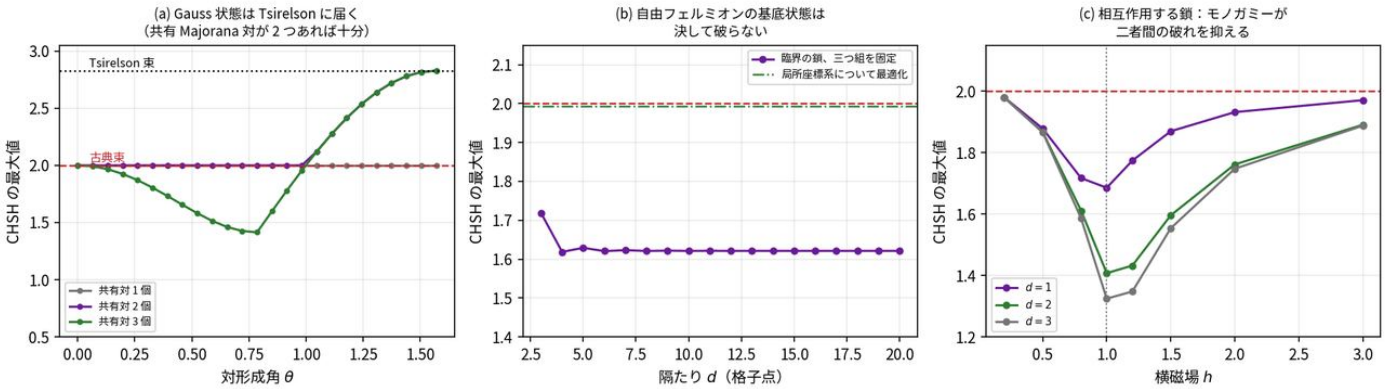


図 20-1. 🆕 (a) 共有ペア 2 本で Tsirelson に達する。(b) 臨界鎖の基底状態は古典束を超えない。(c) 相互作用鎖でも同様。臨界点で最小になるのが monogamy の指紋。

20-6. 願いへの帰結 💭

代数 $\mathcal{A}$：同じ側の設定が**非可換**であること
状態 ω：絡み合いが二者に**集中**していること
自己同型 α：**無関係**

単純さは捨てなくてよい。捨てるべきは**可換性**である。
非決定性は、捨てた結果として**ついてくる**。

論理の向きが重要である。非決定性は要求ではなく**帰結**である。

$$\text{非可換代数} \to \text{両立不可能な観測量} \to \text{Born 則} \to \text{非決定性}$$

そして単純さは無傷である。$M_d(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^d$ より記述が長いわけではない。

> ⚠️ **限定（第 13 版）。** 「非可換代数→Born 則→非決定性」は含意ではない。Born 則は非可換性だけからは出ず、§75-8 のとおり導出していない。§87-9。

第 VI 部　場 — 電磁気学

第 21 章　Bianchi 恒等式は格子でも厳密である ✅🆕

— 磁気単極子が存在しないという法則は、どこから来るのか

微分形式で書けば Maxwell は二本になる。

$$d \star F = \star J \quad \text{（法則）}, \qquad dF = 0 \quad \text{（恒等式）}$$

この二本は性質がまったく違う。

3 次元立方格子上でリンク変数を乱数で与え、基本立方体を囲む 6 枚のプラケットを向き付きで足す。

場の型	最大残差
非 compact（乱数、$L = 6$、seed 0）	3.55×10^{-15}
seed 1	2.67×10^{-15}
seed 2	2.22×10^{-15}

厳密にゼロ（丸め誤差のみ）。動力学と無関係な**組合せ論的事実**である。

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は格子でも「課す法則」ではなく「従う恒等式」である。

21-1. しかし compact 化すると単極子が入る 🆕

各プラケットを基本領域に還元してから立方体の和を取ると、残差は**必ず N の倍数**になる。

群	還元後の (dF) の値	単極子を持つ立方体の割合
$\mathbb{Z}_2$	$\{-2, 0, +2\}$	0.361
$\mathbb{Z}_3$	$\{-3, 0, +3, +6\}$	0.528
$\mathbb{Z}_5$	$\{-10, -5, 0, +5, +10\}$	0.500

磁気単極子は CA の欠陥として自然に存在する。禁止するには追加の条件が要る。

現実の宇宙では単極子は観測されていない。**CA 宇宙では単極子は「作るもの」ではなく「消すもの」になる** — 現実と符号が逆転している。

第 22 章　電荷が $\bmod N$ になる 🆕

— 電荷はなぜ整数倍でしか現れないのか

$\mathbb{Z}_N$ の Gauss 則は $q_j \equiv E_j - E_{j-1} \pmod N$。$L$ 本のリンクの環（閉じた宇宙）で全配位を厳密に列挙した。

N	L	総電荷 $\bmod N$	整数として
2	4	$\{0\}$	$\{0, 2, 4\}$
3	4	$\{0\}$	$\{0, 3, 6\}$
5	3	$\{0\}$	$\{0, 5, 10\}$

LIZARD LLC

「宇宙に電子が何個あるか」という問いを、$\mathbb{Z}_N$ の理論は持っていない。

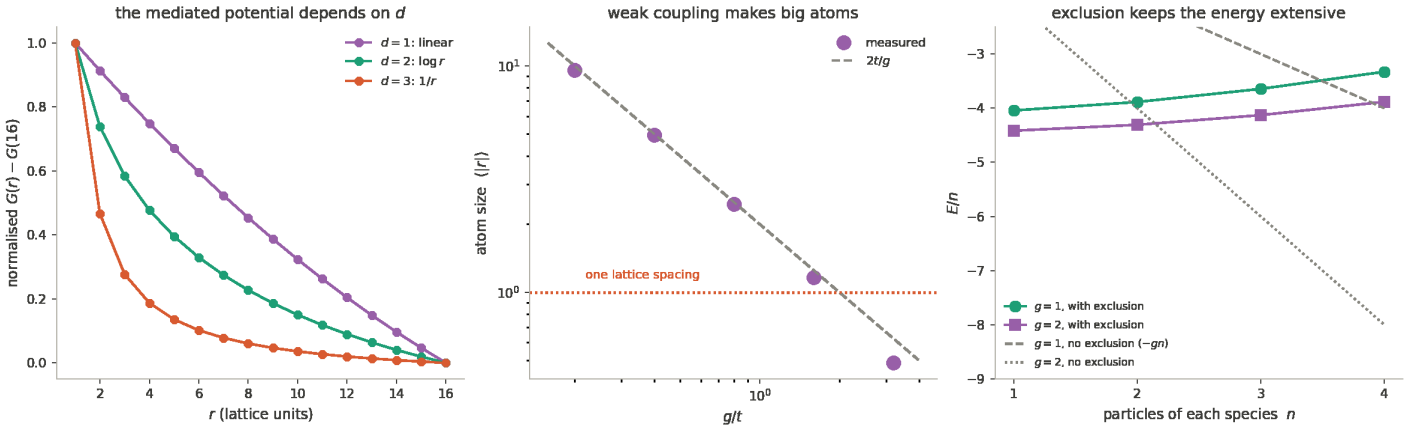


図 22-1. $\mathbb{Z}_N$ 電荷の構造。双一次形式は $N \geq 3$ の電荷を運べない。

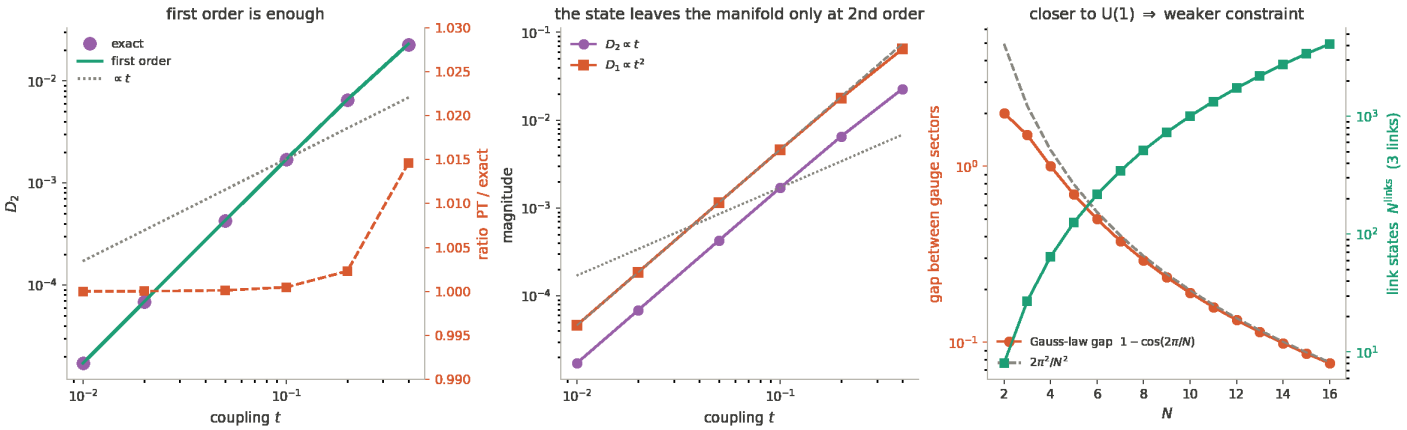


図 22-2. $\mathbb{Z}_N$ における摂動展開。

第 23 章　$U(1)$ は載らない❌／創発は別の話 ⚠️

— マックスウェル方程式は何を記述していて、CA のどこで破れるのか

$\mathbb{Z}_N$ を $N \to \infty$ にすれば $U(1)$ になる、と期待したくなる。**二重に劣化する。**

劣化	内容
拘束の弱まり	セクター間ギャップが $2\pi^2/N^2$ で縮む
資源の爆発	必要な状態数が N^{links}

さらに代数的障害がある ✅ — **Majorana 双一次形式は $N \geq 3$ の $\mathbb{Z}_N$ 電荷を持てない。**

23-1. ただし「創発しない」とは言えない ⚠️📚

微視的に厳密な $U(1)$ を局所有限次元の CA に書き込むことはできない ❯

しかし $U(1)$ ゲージ場が **低エネルギーで創発する** ことは可能である　𝔸

📚 3+1 次元の量子スピン氷（pyrochlore 格子の $S = 1/2$ 模型）では、局所 Hilbert 空間が 2 次元しかないのに、**創発的な $U(1)$ ゲージ場と「光子」が低エネルギー励起として現れる**（Hermele–Fisher–Balents 2004 ほか）。

CA が持てないのは「基本法則としての $U(1)$」である。
「創発する $U(1)$」は禁じられていない — ただし $d \geq 3$ と適切な拘束が要る。

願いにとって重要な緩和である。　電磁気力が基本法則に現れないことは、離散的な基礎理論にとって致命傷ではない。むしろ電磁気力が創発量であることは、多くの現代的枠組みと整合的である。

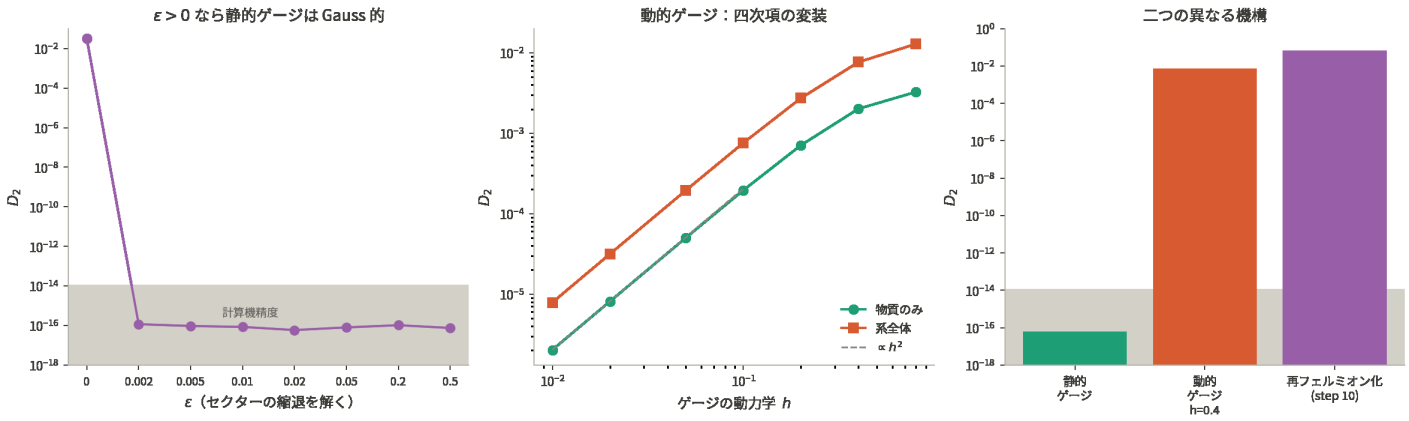


図 23-1. 格子上のゲージ場の構造。

第 VII 部　時空 — 相対論

第 24 章　Lorentz 不変性 — 二つのまったく違う破れ 🆕

— 光速度不変は、格子の上でどこまで成り立つのか

CA にとって最大の障害であり、**しばしば誤解されている**。破れには二種類あり、深刻さが天と地ほど違う。

24-1. 次元 6 の破れ：分散関係 — 無害である 🆕

$$\omega^2 = \sum_i \frac{4}{a^2}\sin^2\frac{k_i a}{2}$$

$|k|$ を固定して方向を変えると速さが変わる。

ka	軸方向	対角方向	異方性
1.0	-4.115×10^{-2}	-1.383×10^{-2}	-2.732×10^{-2}
10^{-1}	-4.166×10^{-4}	-1.389×10^{-4}	-2.777×10^{-4}
10^{-3}	-4.167×10^{-8}	-1.389×10^{-8}	-2.778×10^{-8}

$$\text{異方性} = \frac{(ka)^2}{36} \qquad (\text{測定 } 2.777778\times10^{-2},\ \text{解析 } 1/36)$$

Planck 長の格子なら完全に無害である。

光子	ka（$a=\ell_P$）	異方性
1 eV	8.2×10^{-29}	$\sim10^{-58}$
100 TeV	8.2×10^{-15}	$\sim10^{-30}$

> 「格子だから Lorentz が破れる」という素朴な批判は、この項に関しては当たらない。

⚠️ **注記（第 13 版）。** 表の「異方性」は軸方向−体対角方向で負、式は絶対値である。§87-9。

24-2. 次元 4 の破れ：粒子種ごとの極限速度 — これが本当の問題 ❌🆕

二つの場に別々の結合を与えると $v_i \propto t_i$ で、比は格子間隔に依存しない。そして**粗視化しても一切流れない**。

ブロックサイズ	1	2	8	64
$\lVert v_1/v_2 - 1\rVert$	9.900990×10^{-3}	同	同	同

> 極限速度の不一致は次元 4 の演算子であり、赤外で抑制されない。
> Lorentz 不変性を得るには、**粒子種ごとに手で合わせる**しかない。

実験的制約は $\delta c/c \lesssim 10^{-20}$（種によっては 10^{-22}）。📚 これは格子特有ではなく、Lorentz 対称性を持たない基礎理論一般の **自然さの問題**である。

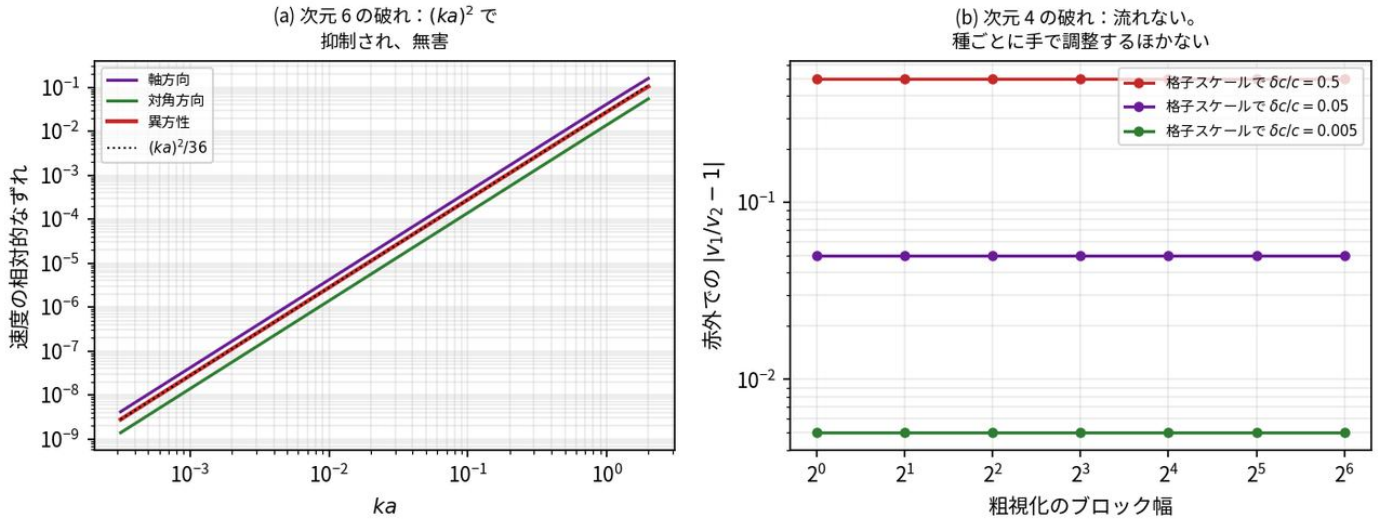


図 24-1. 🆕 (a) 次元 6 の破れは $(ka)^2/36$ で抑制され、Planck 格子では無害。(b) 次元 4 の破れは粗視化で一切流れない。これが本当の障害である。

24-3. 逃げ道は一つしかない 💭

> 規則的な格子は、Lorentz 不変性と原理的に相容れない。
> 離散性を保ったまま Lorentz 不変であるには、離散性が **不規則** でなければならない。

理由は簡単で、**規則格子は特定の慣性系（格子が静止して見える系）を選んでしまう**からである。

一方、Minkowski 時空に **Poisson 散布**で点を撒くと、その統計は Lorentz 変換で不変である。📚 これが因果集合理論の出発点である。

> ランダムネスが Lorentz 不変性を買う。

単純な法則を望みつつ決定論を望まない読者にとって、これは決定的な符合である。　ランダムネスは「余計なもの」ではなく、離散的な世界が Lorentz 不変であるために**必要なもの**だった。第 XI 部でこの線を追う。

> ⚠️ **限定（第 13 版）。** この節は**厳密な** Lorentz 不変性についての言明である。規則格子でも、低エネルギーの有効な不変性（臨界点、対称性による保護、微調整）は原理上ありうる。「必要なもの」は強すぎる。§87-9。

第 VIII 部　物質・次元・質量比

第 II 部で「質量は幾何である」と分かったが、**質量の比は既約な入力として残った**。本部はそれを掘る。**本書で最も長く、最も多くの失敗を含む部である。**

第 25 章　$d = 3$ が三度、独立に要求される ✅

— 空間はなぜ三次元なのか

25-1. 原子には $1/r$ が要る

格子 Green 関数を測定した。

次元	$V(r)$	決定係数
$d = 1$	**線形**（閉じ込め）	$R^2 = 0.997$
$d = 2$	$\log r$	$R^2 = 0.9996$
$d = 3$	$\mathbf{1/r}$	$R^2 = 0.999$

束縛状態の大きさは $R^*/a \sim 2t/g$（実測比 0.96–0.99）。

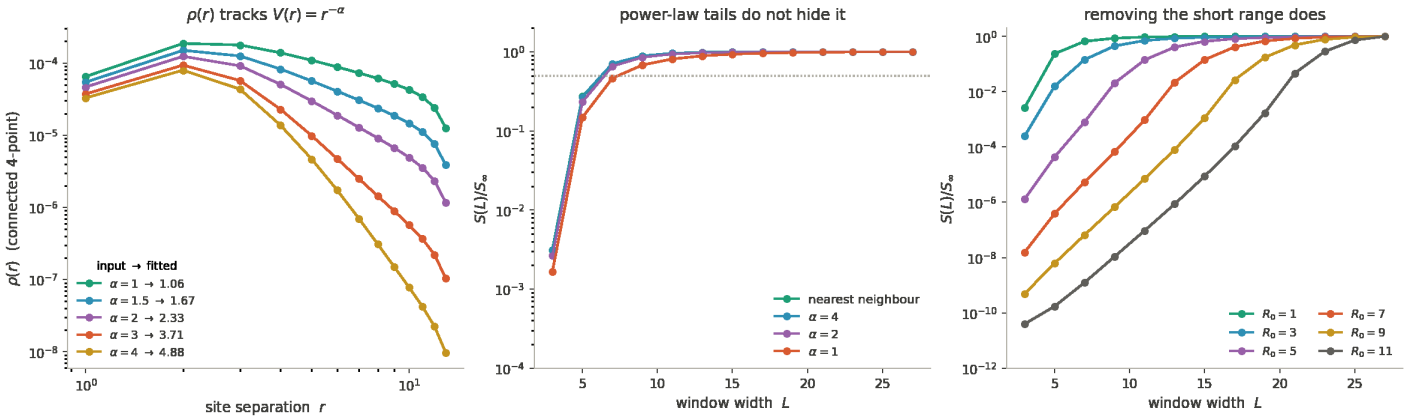


図 25-1. 次元ごとの長距離の振る舞い。

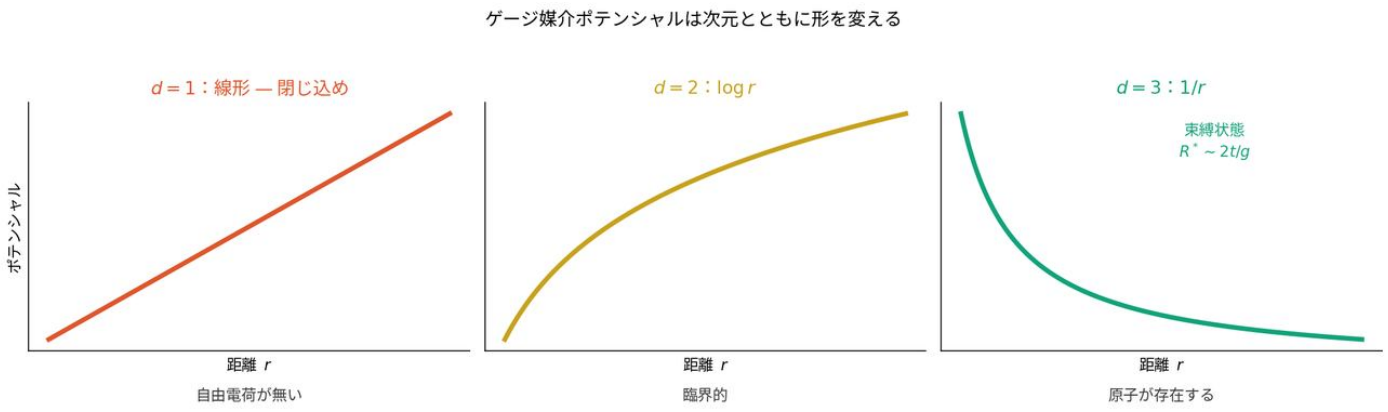


図 25-2. 次元が決めるもの。

25-2. 三つの独立な経路が同じ場所に行き着く

要求	次元	理由
原子	$d = 3$	$1/r$ ポテンシャル
非閉じ込め相	$d \geq 2$	有限の Mott ギャップ
Cooper ペア	Fermi 面が要る	relevant チャネル

原子が存在するためには空間が 3 次元でなければならない。CA でもこれは同じである。

これは CA の欠陥ではなく、現実と一致する制約である。

第 26 章　質量比の問い — 三つの説明様式

— 電子と陽子の質量比は、なぜこの値なのか

濾過：比は自由だが、その値でしか原子が成立しない
生成：比は自由でなく、何らかの機構が**作り出した**
淘汰：初期にはあらゆる比が存在し、持続できないものが消えた

どれが必要かを先に決めてはならない。最も安く検定できるものから順に潰し、**残差に対してのみ次を導入する。**

濾過（即座に測れる）　→　生成（既存機構で足りるか）　→　淘汰（最後に）

💭逆順にやると、生成で説明できたはずのものまで淘汰に押し付けることになる。

第 27 章　濾過 — 下限しか出ない 🆕

— 人間原理はどこまで数値を決められるか

27-1. 素朴な予想が外れる理由

$$\mu = m_1 \frac{r}{1+r}$$

$r = 1$ で $m_1/2$、$r \to \infty$ で m_1。**換算質量は全体で 2 倍しか動かない。**比が 1 から 10^4 まで変わっても、原子の大きさは 2 倍しか変わらない。

27-2. 格子固有の経路を探す 🆕

格子では重心と相対座標が**分離しない**。$k_1 = P/2 + q$、$k_2 = P/2 - q$ と置くと

$$K(P,q) = \sum_d \left[-2A_d \cos q_d + 2B_d \sin q_d \right], \qquad \boxed{B_d = (t_1 - t_2) \sin \frac{P_d}{2}}$$

B 項は $t_1 = t_2$ でも $P = 0$ でも消え、それ以外では消えない。**格子が持つ「質量非対称の記憶」である。**

仮説：極端な比では、動く原子が格子に引き裂かれるのではないか。

27-3. 較正

検定	結果
$t_1 = t_2$ で $\|H - H^\dagger\|$	0.00（B 項が恒等的に消える）
$g = 0$ での束縛エネルギー	-1.7×10^{-1}（箱の人工物。**本物の束縛と区別できる**）

27-4. 結果 — すべて $r \sim 32$ で飽和する ❌🆕

r	$\mu/\mu(1)$	E_b	R^*/a	$M^*/(m_1+m_2)$
1	1.0000	1.4788	2.2432	1.0917
8	1.7778	2.0515	1.5773	1.1856
32	1.9394	2.1383	1.5059	1.2057
512	1.9961	2.1668	1.4835	1.2128
2048	1.9990	2.1683	1.4824	**1.2131**

複合体の慣性は 1.213 に**飽和する** — 固着するなら発散したはずだった。**仮説は反証された。**

さらに、束縛は運動量とともに**強まる**（$P=\pi$ で $r=1$ が $1.48 \to 2.34$）。**動く原子は解離しない。** 帰無結果としてそのまま記録する。

27-5. 唯一残った制約は片側だけ ⚠️🆕

$$\frac{W_{\text{heavy}}}{E_b} = \frac{6}{r\,E_b} \qquad \text{（Born–Oppenheimer の妥当性）}$$

r	**1**	**4**	**8**	**16**	**32**
比	4.06	0.77	0.37	**0.18**	0.09
BO 妥当	❌	❌	❌	✅	✅

$r \gtrsim 10$ が必要。上限はない。

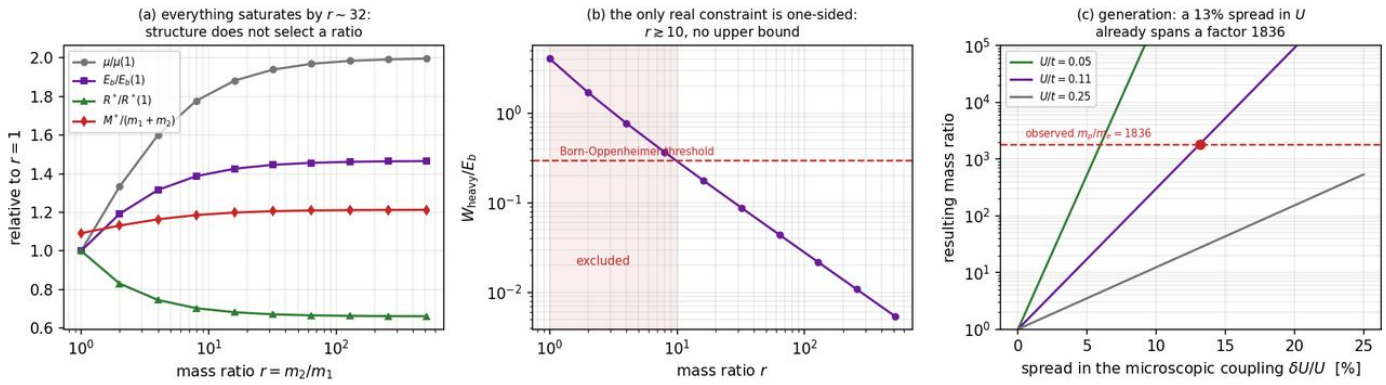


図 27-1. 🆕 (a) 換算質量・束縛エネルギー・半径・慣性、いずれも $r \sim 32$ で飽和する。(b) 唯一の制約は片側の下限。(c) 次元転換による指数増幅（第 28 章）。

濾過は片側の下限 $r \gtrsim 10$ しか与えない。
「その比しか持続できない」という筋書きは、原子の構造からは支持されない。

この否定的結果が、本部で最も価値のある一歩である。 淘汰を導入する前に、淘汰が何を説明すべきかが確定した。

第 28 章　生成 — 値は作れる 🆕

— 大きな数の比は、規則からどう作られるのか

第 13 章の次元転換をそのまま使う。感度は $d\ln\Delta_c / d\ln U = 2\pi t/U$。

U/t	$2\pi t/U$	比 1836 に必要な $\delta U/U$
0.05	125.66	5.98%
0.11	**57.12**	**13.16%**
0.25	25.13	29.90%

微視的な結合定数の 13% の違いが、そのまま 1836 を生む。

比の大きさを説明するのに、淘汰も人間原理も要らない。 しかし説明されないものが残る。

なぜこの比か ⟶ なぜ U は宇宙のどこでも同じなのか

比の問題は、**一様性の問題**に還元された。

ここで初めて淘汰を導入する理由が立つ。

第 29 章　淘汰 — 壁は動くか 🆕

— 物理定数は時間とともに変わりうるか

29-1. 二度の失敗（記録）

版 1: 初期二量体化を真の Δ_0 でない値に取り、走行全体が呼吸振動に支配された。較正が通らず破棄。

版 2: キンクを緩和させながらフェルミオンを再対角化し、壁の**零モード**（Jackiw–Rebbi）で Schur 分岐が飛んでキンクが溶けた。**付録 C に六度記録されている「基底空間の縮退」と同型の誤り。** 診断は残し、コードは破棄。

版 3（採用）: フェルミオンを厳密に $V(\Delta)$ へ還元する。零モードの曖昧さがなく、エネルギー保存を機械精度で検定できる。

29-2. 較正（七項目、すべて通過）

検定	結果
Hellmann–Feynman	1.4×10^{-9}
二真空の縮退（$h = 0$）	5.6×10^{-17}
静的キンクの残差	1.4×10^{-15}
$h = 0$ で壁が動かない	3.4×10^{-13} ボンド
$h = 0$ でエネルギー保存	2.1×10^{-16}

29-3. 結果 1 — 閉じた可逆系でも壁は動く ❌🆕

t	closed	expanding（セル数固定）	expanding（セル追加）	damped
0	199.5	199.5	199.5	199.5
750	111.7	187.4	112.6	178.6
1500	3.2	187.4	4.1	156.0
6000	~ 10	187.5	~ 8	~ 20

「解放されたエネルギーの行き先がない」という推論が誤りだった。　行き先は壁自身の運動エネルギーであり、次いで場の輻射モードである。$t = 12000$ まで延ばしても戻らない（エネルギーは 4.1×10^{-7} で保存）。

> 淘汰に外部の熱浴は要らない。**系自身の多モードが熱浴になる。**
> 第 16 章と同じ構造 — 矢は法則ではなく**分割**にある。ここでは分割が自発的に生じる。

副産物:「淘汰のために規則を確率的にすると Bell を破れなくなる」という懸念が不要になった。確率的にする必要が最初からなかった。

29-4. 結果 2 — 膨張は壁を固定する ⚠️🆕

セル数固定のまま膨張させると、共動キンク幅が $1/a$ で縮んで格子間隔を下回り、**Peierls–Nabarro ピン止め**が効く（12 ボンドで停止）。

> セル数一定の CA では、膨張は構造を格子スケール以下に押し込み、**自らの欠陥を固定する。**
> **CA はセルを増やせない。**

第 X 部の「要素 4」に理由がもう一つ加わる。

29-5. 結果 3 — 淘汰には最低駆動力が要る ❌🆕

J	キンク幅	h_c	駆動／ボンド
0.4	3.836	4.157×10^{-3}	3.453×10^{-3}
1.0	6.246	1.868×10^{-3}	1.552×10^{-3}
6.0	15.595	4.809×10^{-4}	3.995×10^{-4}

$$h_c \propto w^{-1.55} \quad (w = 3.8\text{–}15.6)$$

静的な障壁であることを確認した — 観測時間を 8 倍振っても h_c が桁まで不変。

> 駆動が h_c を下回れば、壁は**どれだけ待っても動かない。**

摩擦がある場合の終端速度は $v = 0.30\,h/\nu$（15% 以内）。

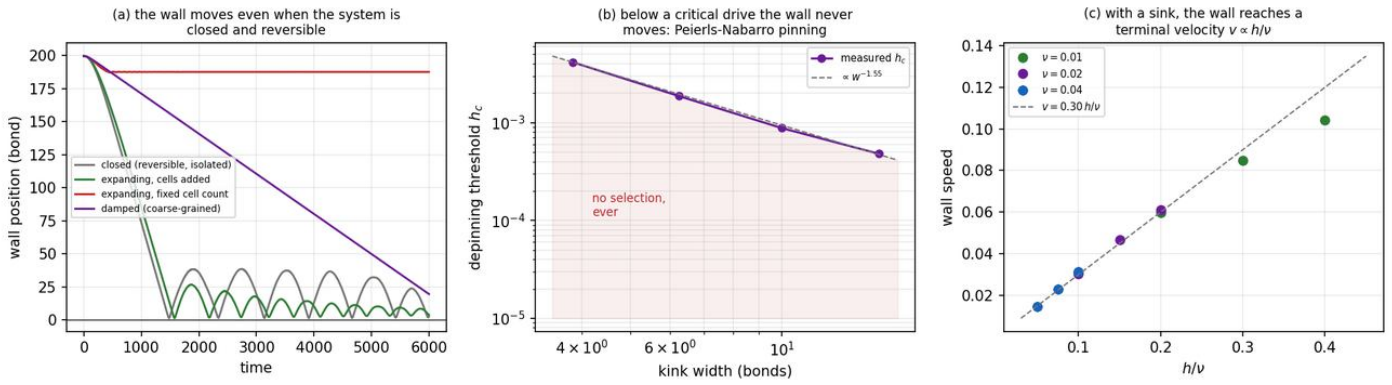


図 29-1. 🆕 (a) 同一初期条件、四通りの設定。閉じた可逆系（灰）でも壁は掃く。セル数固定の膨張（赤）だけが止まる。(b) 脱ピン止め閾値。赤い領域では淘汰が永久に起きない。(c) 捨て場がある場合の終端速度。

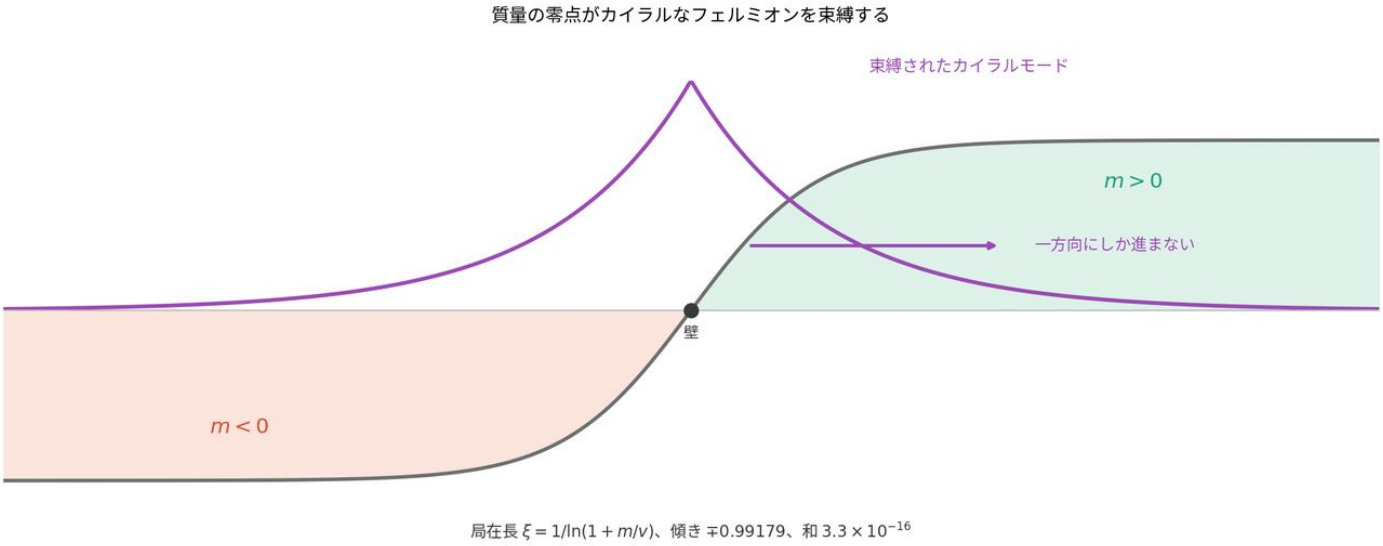


図 29-2. 領域壁の構造。

29-6. 淘汰の分解能 🆕

第 29-5 の閾値と、領域競合の駆動（$d\varepsilon/d(m/v) \to -0.25$／ボンド）を突き合わせる。

$$0.25\,\delta > 1.2 \times 10^{-3} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\delta(m/v) \gtrsim 5 \times 10^{-3}}$$

比が 0.5% 以内で近い領域は、**永久に共存する**。淘汰には分解能の限界がある。

第 30 章　地平線 — 門であり時計である 🆕

— 宇宙の地平線は物理量を決めるのか

膨張が進むと局所的に地平線が現れ、遠方との相互作用が届かなくなる。これは質量比に効くか。**効く。しかも二つの効果が逆向きに。**

顔	物理量	効き方
赤外カットオフ	$L_H = c/H$	相関長 $\xi > L_H$ の秩序が育たない
地平線温度	$T_{\mathrm{dS}} = H/2\pi$	熱ゆらぎが秩序を融かす

30-1. 赤外カットオフは比を圧縮する 🆕

N	$\Delta_0(K{=}0.45)$	$\Delta_0(K{=}1.00)$	比	比／比(∞)	N/ξ
12	0.5100	0.1533	3.326	**0.562**	1.69
32	0.4500	0.1065	4.225	0.713	4.50
128	0.4221	0.0776	5.441	0.919	18.01
300	0.4166	0.0703	5.923	1.000	42.20

次元転換は「赤外まで流れて初めて小さい値になる」機構なので、**流れを途中で止めれば値は大きいままで止まる**。しかも相関長の長いスケールほど強く持ち上げられる。

地平線は質量比を 1 に向かって圧縮する。

$N/\xi \gtrsim 20$ で比は 4% 以内に収まる。

30-2. 地平線温度は比を発散させる 🆕

T	$\Delta_0(0.45)$	$\Delta_0(1.00)$	比
0.000	0.4227	0.0784	5.394
0.080	0.4227	0.0602	7.020
0.120	0.4222	0.0361	11.698
0.250	0.3944	0.0128	30.736

小さいスケールが先に融ける。熱は弱い階層から順に壊す。

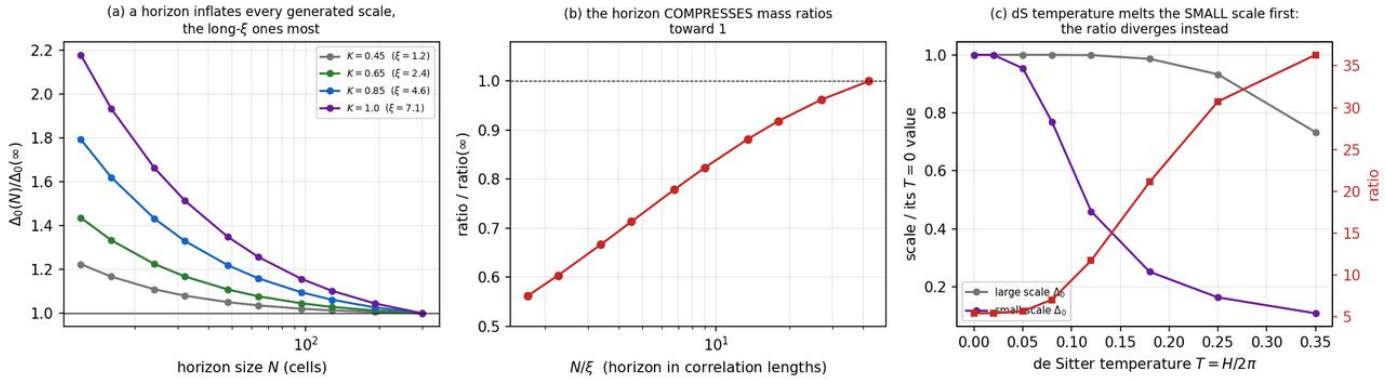


図 30-1. 🆕 (a) 地平線はすべての生成スケールを持ち上げ、相関長の長いものほど強く。(b) その結果、比は 1 に向かって圧縮される。(c) 一方、de Sitter 温度は小さいスケールを先に融かし、比を発散させる。

30-3. 統一すると同じ条件になる

$$H \lesssim \Delta \qquad \text{（生成されるスケールより Hubble 率が小さいこと）}$$

(1) $H \gg \Delta_{\text{large}}$：秩序なし。比は存在しない
(2) $H \sim \Delta_{\text{large}}$：大きいスケールが凍結
(3) $H \sim \Delta_{\text{small}}$：小さいスケールが凍結。**ここで比が定義される**
(4) 地平線内で領域競合（第 29 章）
(5) 地平線を越えた領域どうしは**永久に通信しない**

地平線は選別者ではない。**門であり時計である。**

第 31 章　パッチ一意性で十分か

— 局所の規則だけで、宇宙全体は決まるのか

パッチ一意性：我々の地平線内で一意なら十分。他の比は外に存在しうる
統一一意性：比は宇宙のどこでも同じ。整合条件が値を固定している

31-1. パッチ一意性が要求するもの 🆕

壁の表面張力に不変量が出た。

$$\frac{\sigma}{|V(\Delta_0)| \cdot w} = 0.037 \pm 0.001 \qquad \text{（幅を 4 倍振っても不変）}$$

壁は「バルク 3.7% 分の厚みを持つ膜」である。$\sigma = 0.0932$（$J = 1.5$）。

共存のジレンマ — 第 29-5 の閾値と突き合わせると：

$\delta(m/v) < 0.48\%$ ：壁はピン止めされ、永久に共存する
$\delta(m/v) > 0.48\%$ ：壁は脱ピンし、**一方が他方を食う**

> 安定に共存する領域どうしは、比がほとんど同じである。
> 比が本当に違う領域どうしは、安定に共存しない。
> したがって「他の比が存在する」は、**地平線の外でしか成り立たない。**

地平線は受動的な言い訳ではなく、他の比が存在しうるための能動的な前提条件である。　そして地平線が恒久的に守るのは共動地平線が縮む場合、すなわち $\Lambda > 0$ の場合だけである。

31-2. 統一一意性が要求するもの — 剛性

$$\text{剛性がある} \iff \frac{d\ln\Delta_0}{dK} \simeq 0 \text{ となる有限区間が存在する}$$

非拘束の模型には剛性がない。

K	0.45	0.65	0.85	1.05
$d\ln\Delta_0/dK$	-3.916	-3.354	-3.064	-2.802

ゼロに近づく区間が一つもない。K の 1% 変化が比を 0.6% 動かす。

> 本模型において、比は連続体である。優先される値は存在しない。

反証されたのは「次元転換だけで一意性が出る」という筋書きである。 材料の候補は一つしか見当たらない — **拘束**。

第 32 章　剛性の探索 — 二種類を分けて測る 🆕

— 理論はどれだけ「動かせない」のか

> **Type I**：生成スケールが連続結合に依らない（プラトー）
> **Type II**：結合そのものが離散値しか取れない（梯子）

事前に宣言した非対称性: 跳びが見つかれば決定的、見つからなくても何も言えない（半決定的）。

32-1. Type I、第一の探索 — セクター分類 ❌🆕

較正で一度落ちた（「局所電荷」が Gauss 則でなく $||[H, G_j]|| = 4.0$）。本物の $\mathbb{Z}_2$ 格子ゲージ理論として組み直し、七項目の較正を通過（物理セクター次元 64、$v = 0$ で n_A 保存、$v \neq 0$ で破れ総和は保存）。

r を 25 点走査して、**特別比が一つだけ**見つかった。

$$r = 1 \quad \text{で} \quad \dim : 288 \to 295 \quad (+7)$$

許容誤差 10^{-9} でも 10^{-6} でも同じ、$r = 0.999, 1.001$ では跳ばず、g を 4 倍・v を 8 倍振っても $r = 1$ のみ。非拘束の対照では跳ばない。

> $r = 1$ は二種が同一である点 —「質量比が存在しない」点である。

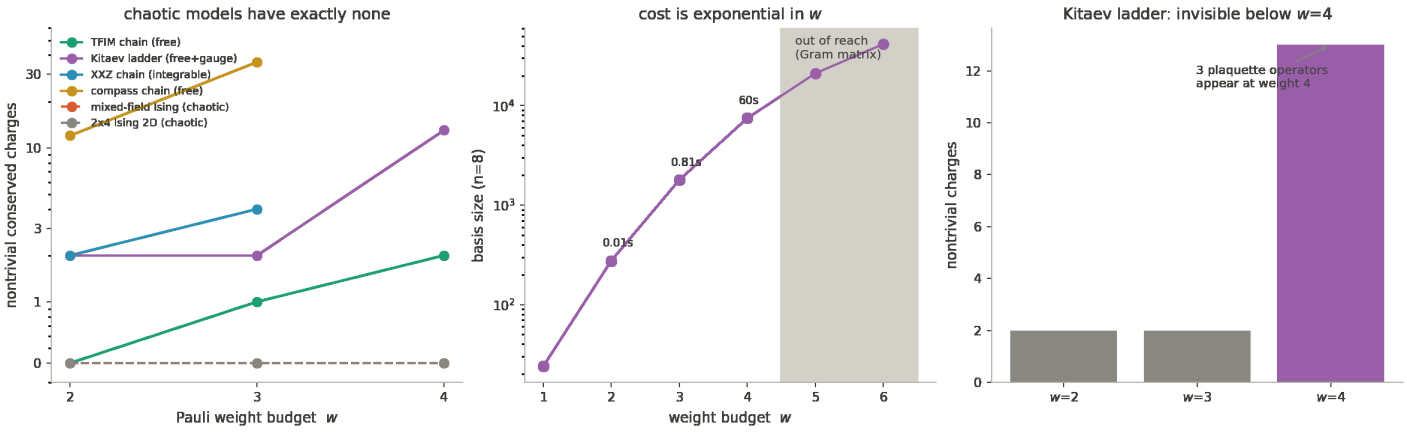


図 32-1. 保存量の網羅探索。重み $w \leq 4$ が実用上の限界である。



図 32-2. 交換子の核から保存量を読み出す。単項と多項の分類がここで決まる。

32-2. Type I、第二の探索 — 拘束付きの $d\ln\Delta_0/dK$ ❌🆕

較正で二度落ちた（探索範囲の端で最小になり、「プラトー」が打ち切りの人工物だった）。範囲を広げて解消。

模型	実現された最小の非ゼロ Δ_0
非ゲージ（対照）	0.0575
ゲージ $h=1.0$	0.0963
ゲージ $h=1.5$	0.1525

拘束の有無で質的な差はない。Type I 剛性はない。

ただし厳密な平坦さは出た（ゼロにおいて）。 $h\geq 1.8$ で $E(\Delta)$ が有限区間で厳密に Δ に依らない（残差 10^{-15}、$E(0)=-hL$ 厳密）。Gauss セクターの真空は物質を含まず、ゲージ不変なホッピングがそれを消滅させるからである。閾値は $\Delta_c\simeq 0.79h-0.94$。

32-3. 三度、同じ形 💭

§32-1: 拘束が特別扱いした唯一の比は $r=1$ — 比が存在しない点
§32-2: 拘束が厳密な剛性を与えるのは $\Delta_0=0$ — スケールが存在しない点
第 12 章: 拘束と可換なサイト間 bilinear は **0 個**

拘束は「何が不可能か」を厳密に言う。「何が実現するか」は言わない。

32-4. Type II — 結合そのものが量子化される ✅🆕

$\mathbb{Z}_N$ の電場項と Gauss 則から、電荷 q の対のあいだのリンクのコストは

$$\boxed{U_q(N)=2h\left[1-\cos(2\pi q/N)\right]}$$

公式を使わず電束配位から直接測って照合した。

N	q	測定値	公式	差
5	1	0.9673762079	0.9673762079	3.3×10^{-16}
5	2	2.5326237921	2.5326237921	4.4×10^{-16}
7	3	2.6613564151	2.6613564151	4.4×10^{-16}

h と t は連続だが、$u_q=U_q/2h$ **は整数** (N,q) **だけで決まる。**

N	q=1	q=2	q=3	q=4
5	0.6910	1.8090	—	—
7	0.3765	1.2225	1.9010	—
9	0.2340	0.8264	1.5000	1.9397
12	0.1340	0.5000	1.0000	1.5000

32-5. 三種以上で滑りが相殺する ✅🆕

$\lambda = \pi c t/h$（$c = 0.968$）として $\ln \Delta_q = -\lambda/u_q$。梯子全体は λ とともに滑るが、三種あれば：

$$\frac{\ln(m_3/m_1)}{\ln(m_2/m_1)} = \frac{R(N;1,3)}{R(N;1,2)} \quad \text{— } t, h, \text{全体スケールに依らない純粋な数}$$

N	**7**	**9**	**12**	**15**	**20**	$\to \infty$
不変量	1.15883	1.17736	1.18301	1.18435	1.18493	**1.18517**

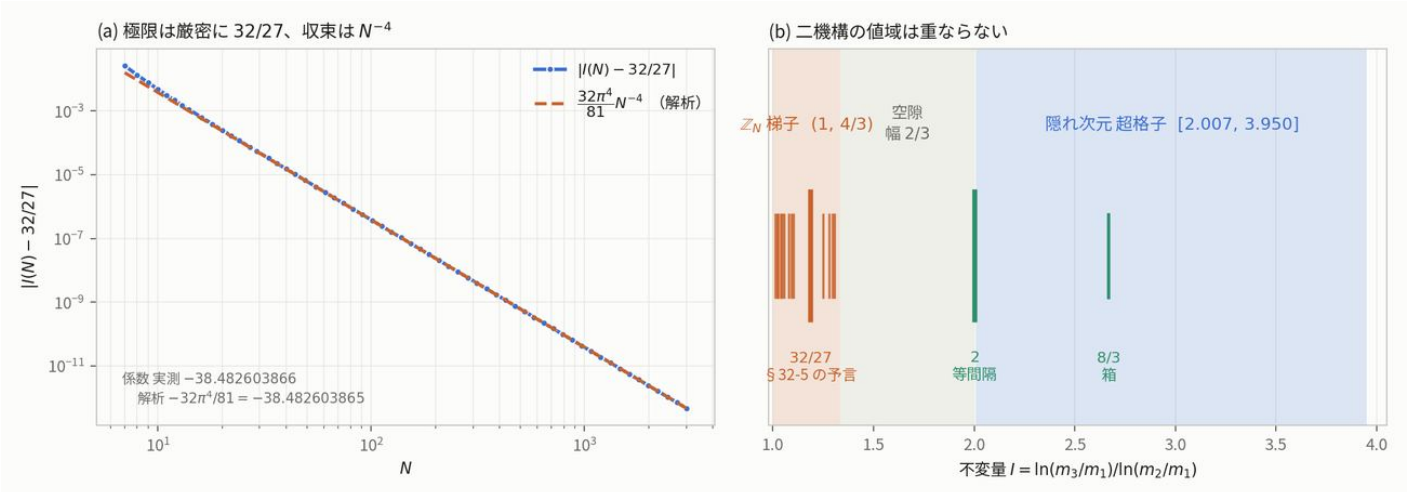
訂正（第 3 版）。 極限は 1.18517 **ではない**。梯子を桁数を上げて走らせ直すと閉じた形が出る。
$A = 4\cos^2(\pi/N)$ として

$$I(N) = \frac{A^2(A-2)}{(A-1)^3}, \qquad I(\infty) = \frac{32}{27} = 1.185185\ldots$$

であり、近づき方は $|I(N) - 32/27| = \frac{32\pi^4}{81} N^{-4}$ に従う。実測係数 -38.482603866、
解析値 $-32\pi^4/81 = -38.482603865$。上の表の 1.18517 は極限ではなく $I(N \simeq 40)$ である。

私が宣言した収束べきは -2 だったが、真のべきは -4 である。
$\csc^2 x = x^{-2} + \frac{1}{3} + \frac{x^2}{15}$ の q に依らない $\frac{1}{3}$ が比 R で相殺するからである。
誤っていたのは模型ではなく予測の方だった。

この不変量は、下の密度の議論ではできなかった**二機構の分離**もやってのける。
$\mathbb{Z}_N$ 梯子の族は $(1,\ 4/3)$ に、隠れ次元の超格子は $[2.007,\ 3.950]$ に住み、
幅 $2/3$ の空隙を挟んで交わらない。**→ 第 33 章。**



統一一意性の側で得られた、**最初の非自明な予言**である。

観測値との照合: 1836 を出すのに必要な t/h は上位が軒並み $O(1)$（$N = 15, q = 2, 6$ で **1.0007**）。**微調整は要らない。**

ただし梯子は密すぎる ⚠️ — $N \le 15$ で 112 段、ln 間隔の中央値 0.109、1836 の 1.5 倍以内に 4 段。**離散だが予言的なほど疎ではない。**

第 33 章　隠れた次元 — 四面体・ダイヤモンド・超格子 ⚠️🆕

— 質量階層をもう一つの機構で作れるか

前章 §32-5 の梯子の不変量は、**二つの機構を分離できる**と述べた。その二つ目がこの章である。第 32 章が $\mathbb{Z}_N$ 梯子から質量比を作ったのに対し、ここでは**空間に隠れた余分な方向**から作る。

結論を先に置く。

> (i) 四面体ステンシルの異方性は k^3 から。二副格子化（ダイヤモンド）が k^4 へ押し上げる。
> (ii) 最近接ダイヤモンドの低エネルギー励起は Dirac 点ではなく **ノーダル線** である。
> (iii) 隠れ次元を超格子とみなすと、三つの質量が一つの機構から出る。
> (iv) その不変量は $I \geq 2$ に閉じ込められ、§32-5 の $32/27$ に**到達できない**。

二つの機構は同じ無次元量について互いに素な値域を予言する。両立しない。どちらか一方である。

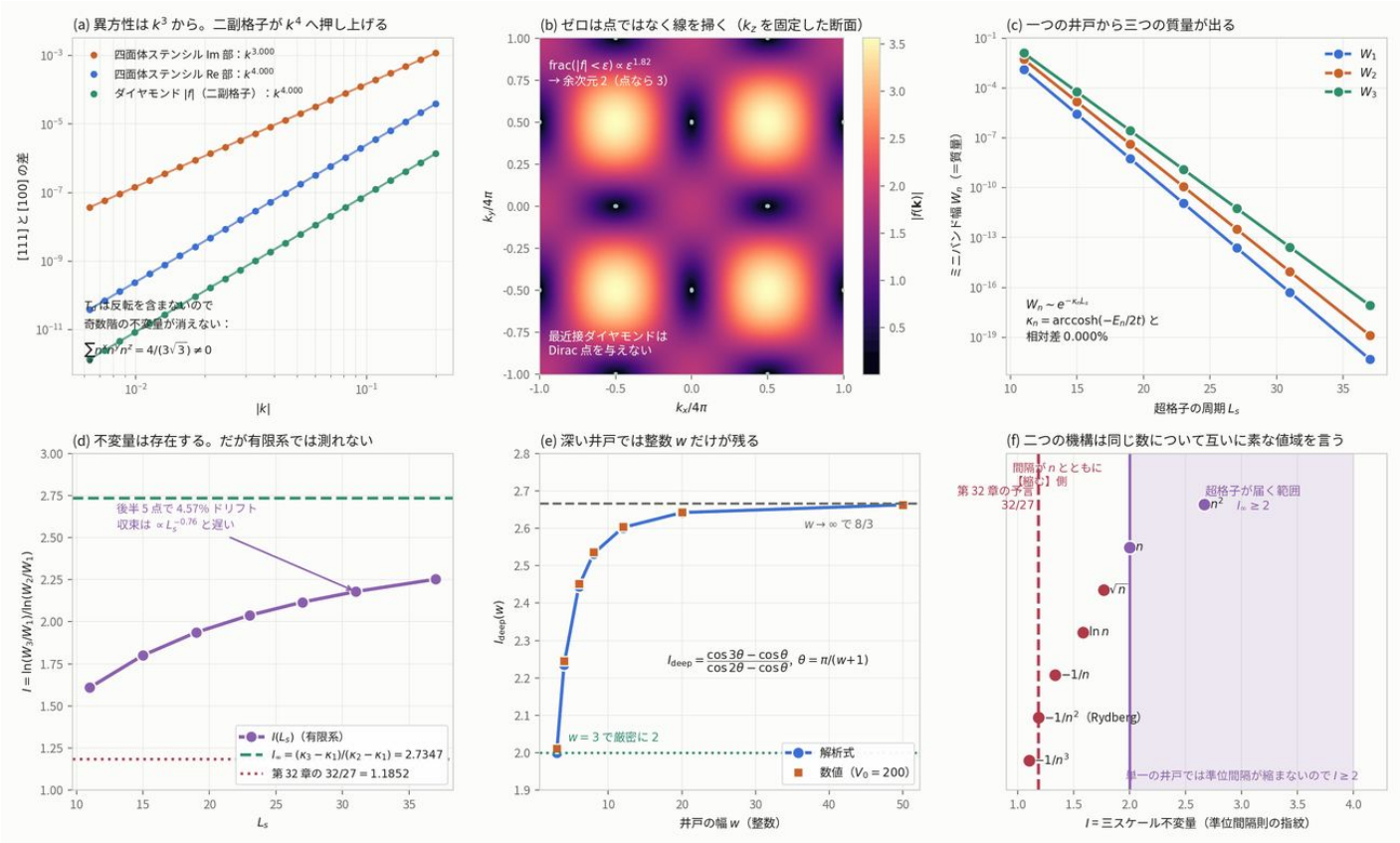


図 33-1. (a) 異方性の次数。(b) ゼロ集合は線。(c)(d) 超格子のミニバンドと不変量。(e) 深い井戸での量子化。(f) 二つの機構の値域。

33-1. 四面体は二次まで等方。三次で崩れる

四面体の四本のベクトル $\mathbf{n}_a$ は

$$\sum_a \mathbf{n}_a = 0, \qquad \sum_a n_a^i n_a^j = \tfrac{4}{3}\delta^{ij}$$

を厳密に満たす（残差 0 と 4.4×10^{-16}）。ここまでは「二次の等方性」の根拠として正しい。**しかし三階テンソルが検定されていなかった。**

$$\sum_a n_a^x n_a^y n_a^z = \frac{4}{3\sqrt{3}} = 0.769800358919501\ (\neq 0), \qquad \sum_a n_a^x n_a^x n_a^y = 0$$

四面体点群 T_d は**反転を含まない**ので、奇数階の不変量が消えない。長波長展開の三次項は $\frac{i}{6} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} k_x k_y k_z$ となり、$[111]$ 方向で最大、$[100]$ 方向で厳密に 0 である。数値でべきを測ると（図 (a)）

対象	$[111]$ – $[100]$ のべき
四面体ステンシル（単一副格子）Im 部	$k^{3.000}$
四面体ステンシル Re 部	$k^{4.000}$
ダイヤモンド $\lvert f\rvert$（二副格子）	$k^{4.000}$

異方性は k^3 から出る。ただし A, B 二副格子が反転対称性を回復し、スペクトルでは k^4 に上がる。

「なぜ素朴な四面体 4 近傍ではなくダイヤモンドか」に定量的な答えが付く — 二部構造が異方性を一次分だけ押し下げる。

> 💭 なお k^3 は第 24 章の二分類（次元 6 は $(ka)^2/36$ で無害、次元 4 は流れない）の**どちらにも属さない次数**である。粗視化で流れるかは未検定である。

33-2. 最近接ダイヤモンドは Dirac 点を持たない ❌

$$f(\mathbf{k}) = \sum_a e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{d}_a} = 4\left[\cos u \cos v \cos w - i\,\sin u \sin v \sin w\right], \qquad u = k_x/4, \ldots$$

（解析形の残差 4.4×10^{-16}。）ゼロ条件は $\cos u \cos v \cos w = 0$ **かつ** $\sin u \sin v \sin w = 0$ の**二条件**で、三次元では**線**を掃く。数値でも

$$\mathrm{frac}(|f| < \varepsilon) \propto \varepsilon^{1.82} \qquad (4 \times 10^6 \text{ 点})$$

で余次元 $\simeq 2$（点なら 3）。

最近接ダイヤモンドは Weyl／Dirac 粒子を与えない。ノーダル線である。

「副格子自由度をスピノル成分に使える」だけでは足りない。Fu–Kane–Mele がスピン軌道結合を必要としたのはこのためである。加えて**ノーダル線上では線方向の群速度が** 0 なので、低エネルギー励起はそもそも等方的でない — §33-1 の k^4 は Γ 点（バンド端）の話であって、低エネルギー領域の話ではない。**「四面体格子は低エネルギーで等方」という言明は、どの点のまわりかを指定しない限り検定にならない。**

33-3. 超格子としての隠れ次元 — 一つの井戸から三つの質量

隠れ方向に周期 L_s、幅 w、深さ V_0 の井戸列を置く。壁間トンネリングがミニバンドを作り、その幅が可視の質量になる。

$$m_n \equiv W_n = 4|t_{\mathrm{eff}}^{(n)}| \sim e^{-\kappa_n L_s}$$

多倍長（60 桁）で測ると（図 (c)）

L_s	W_1	W_2	W_3
11	1.28120×10^{-3}	5.28781×10^{-3}	1.25338×10^{-2}
19	5.58211×10^{-9}	4.12583×10^{-8}	2.68697×10^{-7}
27	2.43211×10^{-14}	3.21915×10^{-13}	5.76042×10^{-12}
37	4.84133×10^{-21}	1.32748×10^{-19}	8.40315×10^{-18}

$$\kappa_1 = 1.542967, \quad \kappa_2 = 1.470134, \quad \kappa_3 = 1.343792$$

いずれも孤立井戸の束縛準位から $\kappa_n = \mathrm{arccosh}(-E_n/2t)$ で予測される値と**相対差** 0.000%（$R^2 = 1.000000000$）。三次元部分（ダイヤモンド）を結合しても幅は変わらない — ミニバンド幅は $|f(\mathbf{k})|$ のシフトを受けるだけである。

超格子は「一つの機構・一つのパラメータ L_s」から三つの質量を出す。

第 26 章が求めた「同一機構から出た三つ以上のスケール」という構造的条件は、**これで満たされる**。m_p が QCD、m_e が湯川という混在は起きない。三つとも同じ井戸の異なる束縛準位である。

33-4. しかし不変量は予言にならない ❌

三スケール不変量を

$$I \equiv \frac{\ln(W_3/W_1)}{\ln(W_2/W_1)}$$

と定める。有限の L_s では $L_s = 11$ **で** 1.6088、$L_s = 37$ **で** 2.2527 とドリフトし、後半 5 点で 4.57%（宣言した閾値 2% を超過）。前因子 A_n が相殺せず、収束は $\propto L_s^{-0.76}$ と遅い。漸近値は

$$I_\infty = \frac{\kappa_3 - \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} = 2.7347119660$$

で L_s に依らない。**「不変量が存在する」は正しいが、「有限系で測れる」は正しくない。** §32-5 の $32/27$ が $N \to \infty$ の極限値であるのと**同じ弱点を共有する。**

さらに井戸の形に連続依存する。

w	V_0	I
8	2.5	2.22009
8	5.0	2.02007
6	3.0	2.33638
12	3.0	1.95531

変域の相対幅 **18.2%。隠れ次元は階層を説明していない。パラメータ化している。**

33-5. ただし深い井戸では整数 w だけが残る ⚠️

$V_0 \to \infty$ で $\kappa_n \simeq \ln(-E_n)$、$E_n \simeq -V_0 - 2\cos\theta_n$、$\theta_n = \pi n/(w+1)$ より

$$I_{\mathrm{deep}}(w) = \frac{\cos 3\theta - \cos\theta}{\cos 2\theta - \cos\theta}, \qquad \theta = \frac{\pi}{w+1}$$

w	**3**	**4**	**8**	**50**	∞
解析	2.00000000	2.23606798	2.53208889	2.66245131	$8/3$
数値（$V_0 = 200$）	2.01066354	2.24574034	2.53617203	2.66258067	—

離散パラメータ w だけが残る。 これは第 32 章の $U_q = 2h[1 - \cos(2\pi q/N)]$ と同じ型の量子化であり、剛性の候補になる。ただし疎性は梯子と同じ問題を抱える — 隣接間隔は $w = 3 \to 4$ で 0.236 だが $w = 59 \to 60$ で 9.9×10^{-5} と急速に稠密化する。

33-6. 決定的な結果 — 二つの機構は両立しない

I は**準位間隔則の指紋**である（図 (f)）。

κ_n の則	I
$-1/n^3$	1.1005291
$-1/n^2$（**Rydberg**）	$32/27 = 1.1851852$
$-1/n$	$4/3 = 1.3333333$
$\ln n$	1.5849625
$\sqrt{n}$	1.7673270
n（等間隔）	$\mathbf{2}$
n^2（箱）	$8/3 = 2.6666667$

$I < 2$ は**準位間隔が n とともに縮む**ことを要求する。単一のポテンシャル井戸ではこれが起こらない（束縛準位の間隔は下から上へ広がるか、せいぜい一定）。したがって

$$\boxed{I_\infty \geq 2 \text{（下限は解析的）。超格子機構は } 32/27 = 1.1852 \text{ を出せない。}}$$

(w, V_0) の走査では $I_\infty \in [2.007,\ 3.95]$ が得られた（下限は $w = 3, V_0 \to \infty$ で解析的に厳密に 2）。上限は走査の下限をどこに置くかに依り、束縛の閾値近くまで許すと 4 を超える。**動かないのは下限 $I \geq 2$ の方である。**

$$\S 32\text{-}5 \text{ の予言 } 32/27 \text{ との最短距離 } \simeq 0.82$$

そして第 32 章の $32/27$ は、この表の**Rydberg 型 $\kappa_n \propto -1/n^2$ の厳密値**にほかならない：

$$\frac{1 - 1/9}{1 - 1/4} = \frac{8/9}{3/4} = \frac{32}{27}$$

つまり二つの機構は「準位間隔がどう並ぶか」について正反対を言っている。$\mathbb{Z}_N$ **梯子は Rydberg 型、隠れ次元の井戸は箱型に近い。** 同じ観測量が両方を同時に満たすことはない。

33-7. この章の位置づけ ⚠️

本章は**確立済みの結果ではなく、検定の記録**である。以下は本文の主張として採らない。

- 「隠れ次元が質量階層を**説明する**」 — 井戸の形に 18.2% 依存する。パラメータ化である。
- 「隠れ次元機構が §32-5 の予言を支持する」 — 値域が互いに素。**反対の証拠**である。

採るのは次の三点である。

1. 四面体の異方性は k^3 から、二副格子化で k^4（T_d に反転がないため）
2. 最近接ダイヤモンドはノーダル線であり Dirac 点を持たない
3. **$I \geq 2$ という解析的な下限が、二つの機構を排他にする**

3 は本書で数少ない「二つの候補機構を実際に分ける」結果である。第 32 章の $32/27$ が正しければ隠れ次元機構は捨てられ、逆もまた真である。**どちらが正しいかは、まだ決まっていない。**

第 34 章　なぜ電子は陽子に落ちないか — 離調による保護 🆕

— 原子はなぜ潰れないのか

34-1. まず前提を正す

$$\boxed{\text{電子と陽子は互いに反粒子ではない。対消滅は}\textbf{バリオン数とレプトン数}\text{が禁じている。}}$$

本当の過程は**電子捕獲**である。

$$e^- + p \longrightarrow n + \nu_e$$

あらゆる保存則を満たす。 水素が安定なのはエネルギーが足りないからにすぎない。

$$\boxed{\frac{m_n - m_p}{m_e} = 2.5310 \quad > 1 \text{ でなければならない}}$$

余裕は 2.53 倍。m_p/m_e で言えば 725 **まで下がると水素が消える**（現在 1836）。

34-2. 空間的制約 — 効かない 🆕

r	**1**	**16**	**256**	**1024**
$\|\psi(0)\|^2$	0.0505	0.1167	0.1242	0.1246

r を 1000 倍振っても 2.47 **倍しか変わらない**（$|\psi(0)|^2 \propto \mu^3$、$\mu$ が 2 倍しか動かないので上限 8 倍）。

📚現実の水素で捕獲が遅いのは $(R_{\text{nuc}}/a_0)^3 \sim 10^{-15}$ のためだが、**これを決めているのは α と核のスケールであって m_p/m_e ではない。**

34-3. 時間的制約 — 効く 🆕

種の転換は**振動**として起きる。

$$\boxed{P_{\max} = \frac{v^2}{v^2 + (\Delta/2)^2}, \qquad \Delta = 2|t_A - t_B|}$$

r	Δ	$v = 0.10$	$v = 0.01$
1	0.0000	1.00	1.00
2	1.0000	0.0385	4.0×10^{-4}
16	1.8750	0.0112	1.1×10^{-4}
1836	1.9989	9.9×10^{-3}	1.0×10^{-4}

分離した保存則は「課す」必要がない。**質量比が守っている**のである。

34-4. 第 32-1 の帰無結果が反転する 💭

拘束が特別扱いした唯一の比は $r = 1$ だった。それを「比が存在しない縮退点」として失望とともに記録したが、いま見ると違う。

$r = 1$ は**共鳴点**である。保護が破れる唯一の場所である。

探索は「値がどこか」ではなく「危険がどこか」を正しく教えていた。 第 32-3 の総括「拘束は何が不可能かを言う」と同じことである — $r = 1$ で不可能になるのは、二種が別々でいることだった。

34-5. しかし保護は飽和する ❌🆕

$\Delta = 2|t_A - t_B| \to 2t_A$ で頭打ちになる。**バンド幅が有限だからである。**

r	2	4	16	64	1836
Δ	1.000	1.500	1.875	1.969	1.999

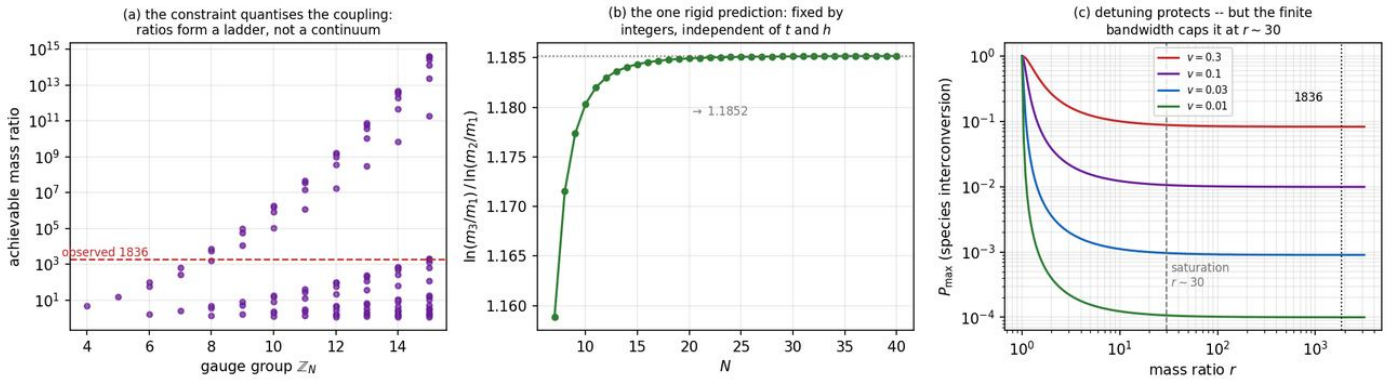


図 34-1. 🆕 (a) 拘束が結合を量子化するので、達成可能な比は梯子になる。(b) 三種以上で滑りが相殺し、整数だけで決まる不変量が残る。(c) 離調による保護。有限バンド幅のため $r \sim 30$ で飽和する。

34-6. 第 VIII 部の総括

制約	種類	値
電子捕獲の禁止 📚	**下限**	$m_p/m_e \gtrsim 725$
Born–Oppenheimer	**下限**	$r \gtrsim 10$
離調による保護	**下限**	抑制 10^{-6} に $r \gtrsim 100$
上限	—	**どれも与えない**

様式	何を説明するか	判定
濾過	下限のみ	⚠️ 1836 を選べない
生成	比の**大きさ**	✅ $\delta U/U = 13\%$ で足りる
淘汰	比の**一様性**	✅ 可逆系でも働く。ただし分解能 $\delta \gtrsim 5 \times 10^{-3}$
セクター選択	比の**離散性**	⚠️ Type II で部分的な根拠あり

値の説明は**生成**にある。保護にも濾過にもない。

34-7. 問いの変形の記録 💭

なぜ $m_p/m_e = 1836$ か
　↓（濾過を測る → 下限しか出ない）
なぜ 10 でなく 1836 か
　↓（生成を測る → 13% の δU で足りる）
なぜ U はどこでも同じか
　↓（淘汰・地平線を測る → 分解能と因果の限界）
なぜ宇宙は一様か

元の問いは、標準的な宇宙論の問いに合流した。 これは失敗ではなく、問いが正しく分解されたということである。

第 IX 部　重力とホログラフィー

第 III 部で「幾何は相互作用を生まない」と分かった。**バルクの格子は入力であって出力ではなかった。** ここでその判定が覆る — **規則を境界に置けば、空間そのものが出力になる。**

第 35 章　10^{61} 問題が消える ⚠️（第 13 版で限定。§87-8）

— セル数の比較で何が言えるのか（副題を第 13 版で変更）

観測可能な宇宙（$L = 10^{26}$ m）を Planck 長のセルで埋めると：

提案	セル数	Bekenstein 束との比
バルク CA（3 次元）	2.37×10^{182}	$\mathbf{1.97 \times 10^{60}}$
Bekenstein 束	1.20×10^{122}	1.000
境界 CA（2 次元）	3.83×10^{121}	$\mathbf{0.318 = 1/\pi}$

探究最大の障害だった 10^{61} 問題が、規則を境界に置くだけで消える。

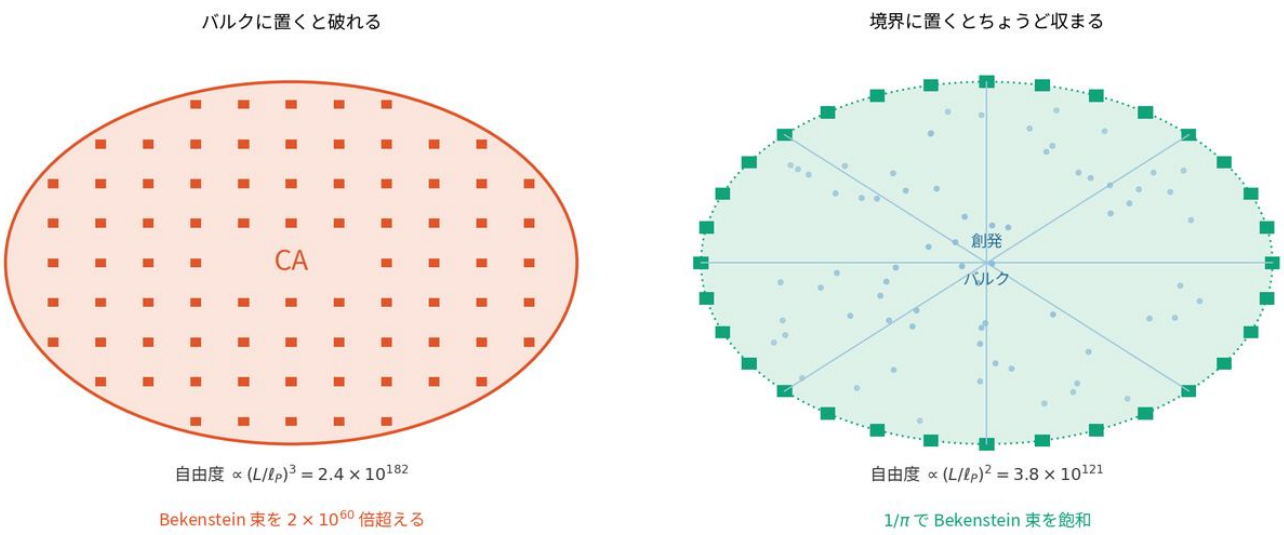


図 35-1. バルクに置くか境界に置くか。同じ規則でも意味が変わる。

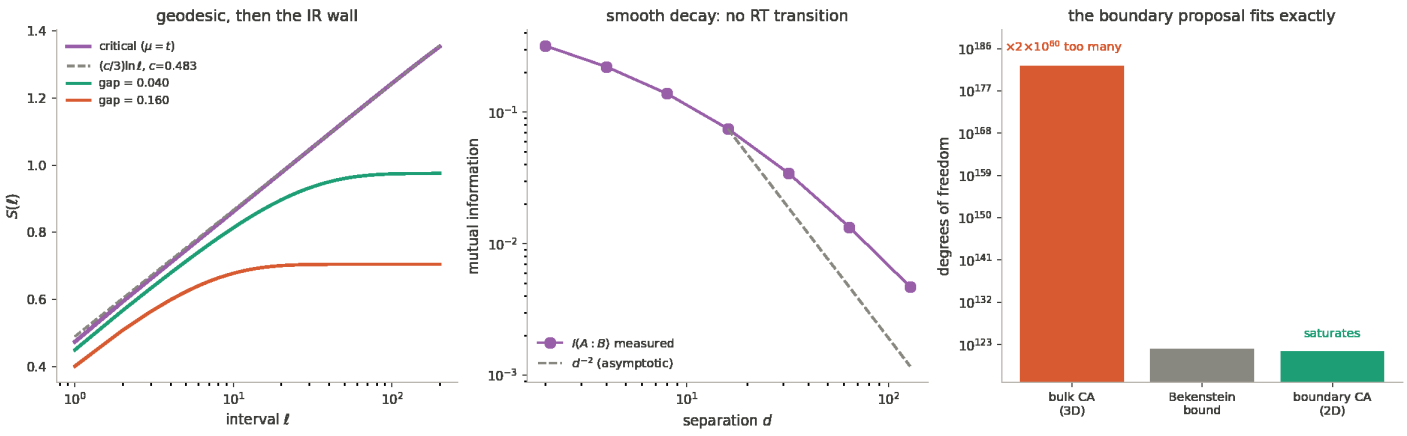


図 35-2. 境界からバルク量を読み出す。

バルク量が境界から読み出せる。 $S(\ell) = (c/3)\ln \ell$ を AdS_2 測地線と Ryu–Takayanagi で結ぶと $G = 3/(2c)$。測定した $c = 0.483$（厳密値 $1/2$）から $G = 3.109$（厳密値 3）。

LIZARD LLC

⚠️ **訂正枠（第 11 版）。** ここで用いた計量 $ds^2 = L^2(dz^2 + dx^2)/z^2$ は双曲平面 H^2、すなわち AdS_3 の**等時刻断面**であり、AdS_2 ではない。RT で得られるのは Brown–Henneaux の $c = 3L/2G_3$、つまり**三時空次元の** G_3 である。G_4 には届いていない。また $c \simeq 1/2$ は大中心電荷の領域外である。本章の「10^{61} 問題が消える」は Bekenstein 束との比についての言明であり、G/e^2 の比を導いたものではない。Planck 長でセルを切った時点で G を使っているので、セル数から G を説明すると循環になる。§85-1、第 84-7 節。

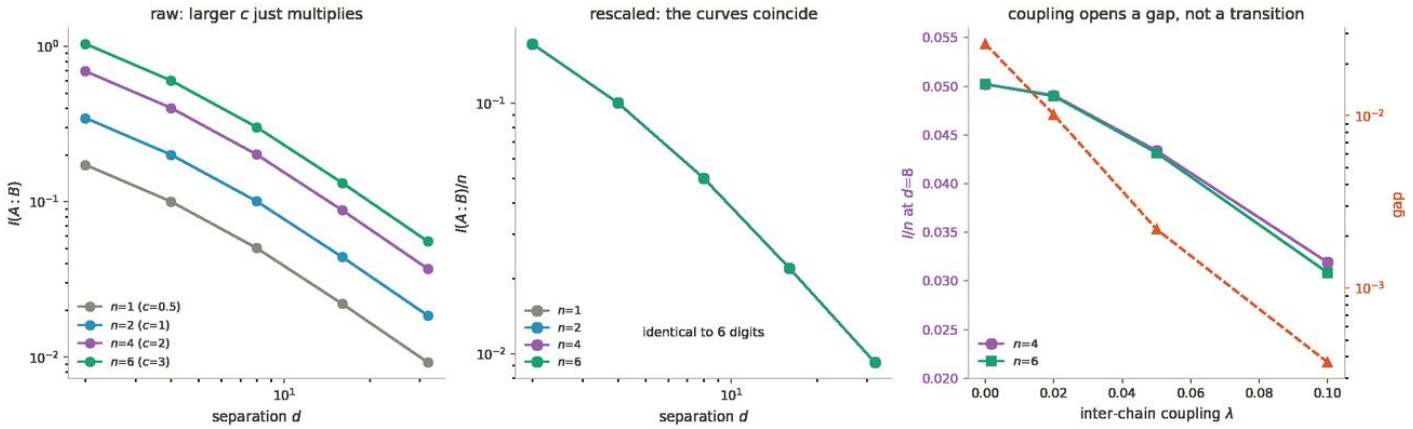


図 35-3. 中心電荷の測定。

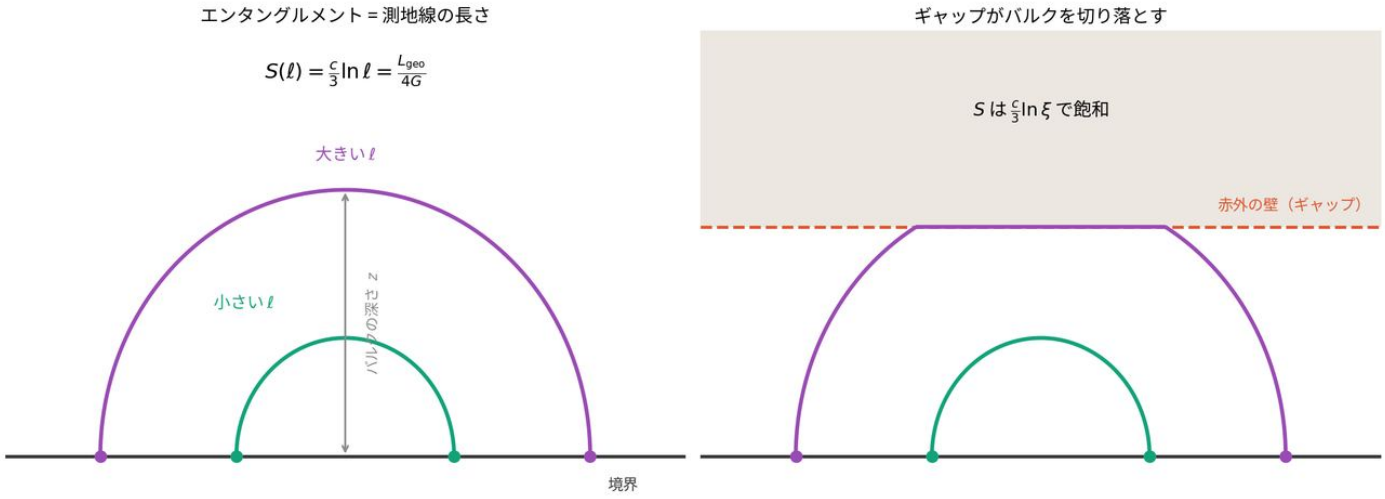


図 35-4. Ryu–Takayanagi 測地線。

バルクの深さは $\ln N \approx 280$ 層 — **観測可能な宇宙全体でも MERA 型ネットワークの規模で足りる。**

⚠️ **訂正（第 13 版）。** 上の表は立方体の体積、一面、半径 L の球の BH 束を混ぜている。半径 L の球に揃えると、バルク/BH 束は 8.25×10^{60}、表面/BH 束は 4.000 である（K435）。桁の隔たりが消えることは残るが、「$1/\pi$」「飽和」は取り下げる。§87-8。

第 36 章　創発測地線と第一法則 — Einstein 方程式の必要条件　⚠️（第 13 版で撤回。§87-2）

— 重力は幾何として創発するのか

❌ **撤回（第 13 版）。** 第 12 版までの章題は「創発測地線は Einstein 方程式を満たす ✅」だった。第一法則は任意の状態族の恒等式で（§85-2）、ここで測ったのは一つの区間族である。バルクの計量も線形化 Einstein テンソルも構成していない。**線形次数でも Einstein 方程式は検証していない。** 測定値はそのまま正しい。§87-2。

線形化 Einstein 方程式は、**すべての領域についての第一法則と RT 辞書のもとで**、境界のエンタングルメント第一法則から導かれる（第 12 版までは条件なしに「等価」と書いた）。

$$\delta S_A = \delta \langle H_A \rangle$$

検定	結果
第一法則の成立	比 1.000327
modular Hamiltonian の形	放物線、$\ell = 12$ で $R^2 = 0.998$

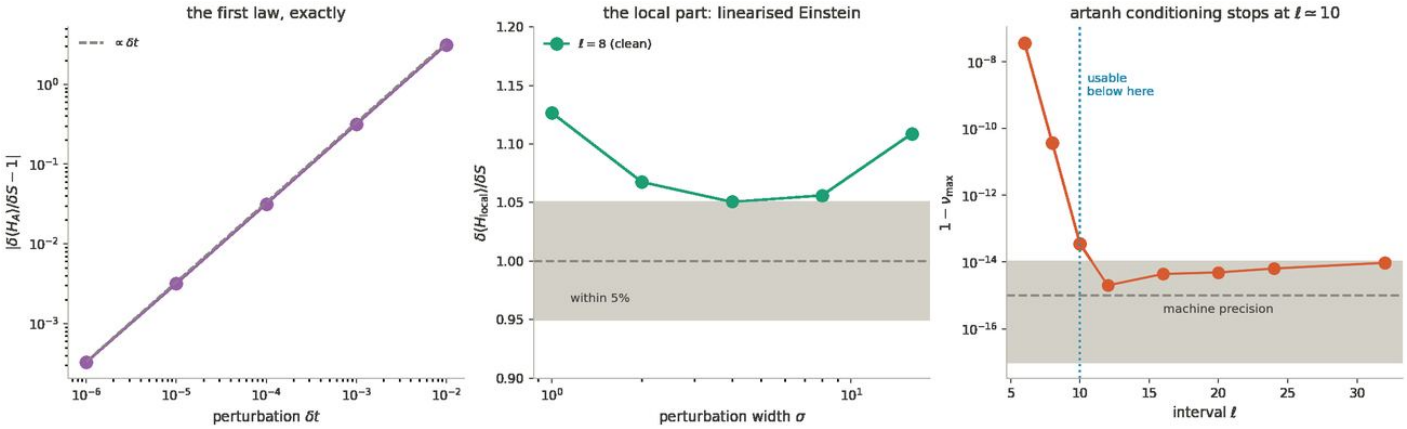


図 36-1. 第一法則の検定。

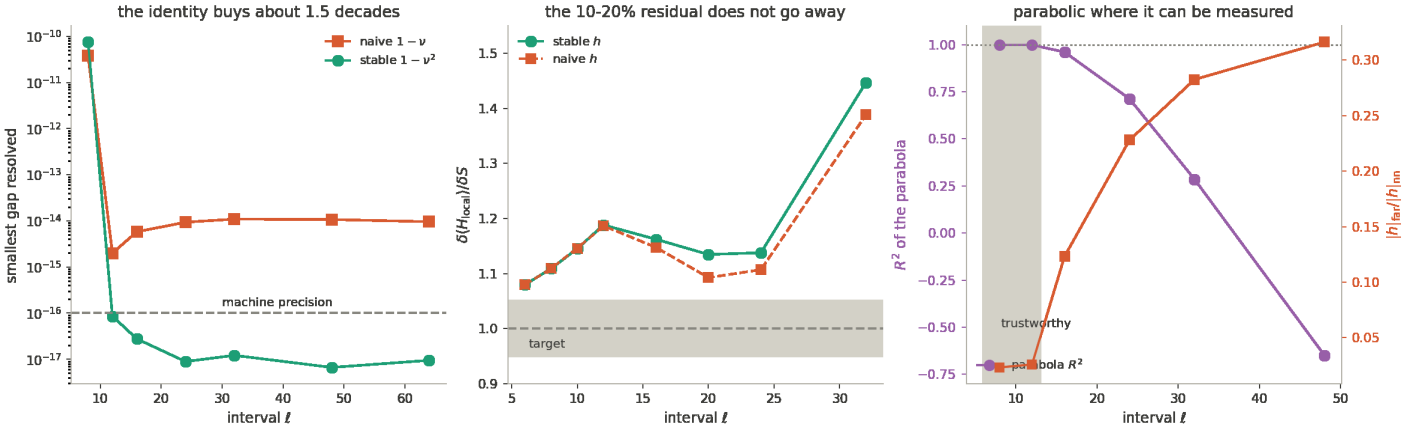


図 36-2. 安定な modular Hamiltonian。

36-1. 撤回の記録 💭

第 1 世代では「Einstein の残差は物理である」と結論し、**撤回した**。原因は局所部分の切断が誤っていたことである。切断距離 R を正しく取ると：

R	1	3	5	9	13
$\delta\langle H^{(R)}\rangle/\delta S$	1.1090	1.0312	1.0289	1.0098	**1.0004**

必要な R は $\ln \ell$ に比例するだけ（$R/\ln \ell$ が一定、R/ℓ は $0.83 \to 0.23$）。多倍長計算で $\ell = 40$ まで到達し、切断誤差が R について指数的に減衰することを 5 桁にわたって確認した（減衰長 2.05）。

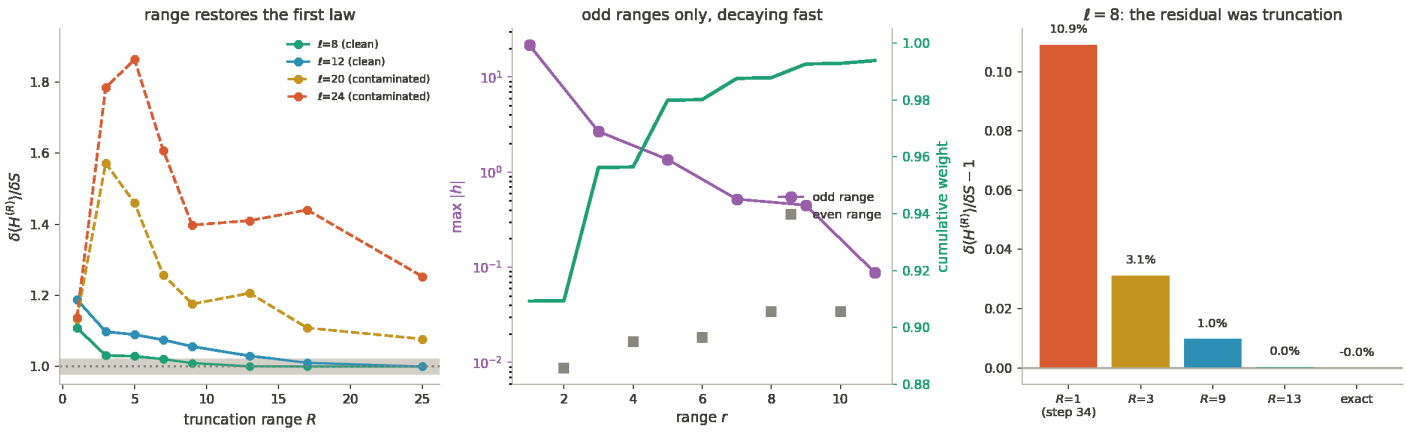


図 36-3. 切断距離に対する収束。

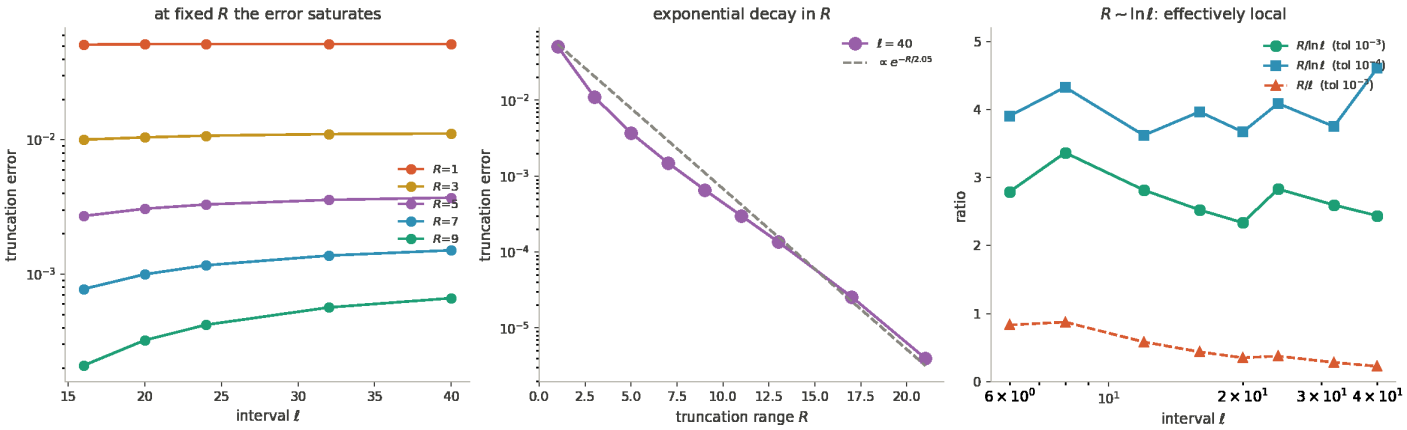


図 36-4. 格子 T_{00} は幅 ~ 2 格子分の真に局所な演算子である。

> 💭 **「測っていたデータを使わなかった」** — これが誤りの原因だった。付録 C に記録する。

36-2. 二次の応答は正である — 必要条件 ⚠️（第 11 版で撤回。§85-2）

相対エントロピー $S_{\mathrm{rel}} = \Delta\langle H_A\rangle - \Delta S \geq 0$ を測ると $S_{\mathrm{rel}} \propto \lambda^{1.9934}$、あらゆる摂動・両符号・全形状で正。正定値二次形式（量子 Fisher 情報計量）であり、これがバルクの canonical energy 正値性、すなわち二次の Einstein 方程式である。

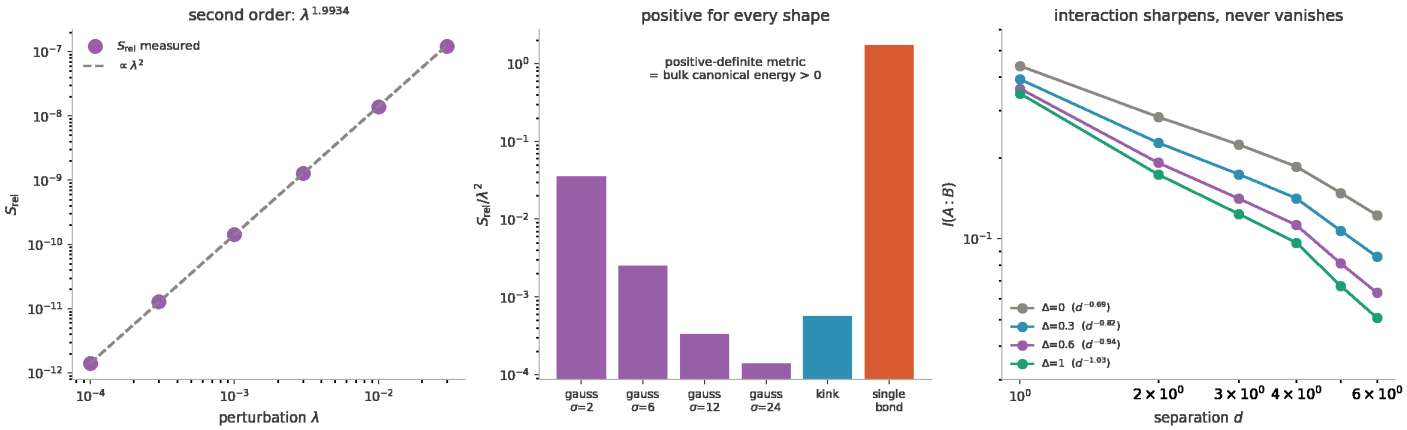


図 36-5. 相対エントロピーの二次性。

> ❌ **撤回（第 11 版）。** 第 10 版はこの節を「二次の Einstein 方程式も成立する ✅ とし、正定値二次形式をバルクの canonical energy 正値性と同一視した。第一法則と相対エントロピーの正二次性は任意の量子状態族の恒等式（Klein の不等式）であり、幾何のない独立二量子ビット対でも成立する（K400–K402）。測定値はそのまま正しいが、それを「二次の Einstein 方程式」と読んだ推論を撤回する。§85-2、付録 C-10-1。

第 37 章　疎性の壁 ⚠️（第 11 版で判定変更。§85-3）

— ホログラフィーはどこで止まるのか

> ⚠️ **判定変更（第 11 版）。** 第 10 版はこの章を ❌ とした。三つの試みのうち「c を上げても I/n が 6 桁一致」は独立コピーの加法性そのものであり、ホログラフィックな検定になっていなかった。有限自由度で相互情報量がゼロにならないことも反証ではない。判定は「主要項 I/C_T のスケーリングを未測定 ⚠️」に改める。「自由フェルミオンであることが障害」という主張は残る。§85-3、付録 C-10-3。

しかし弱い意味でしかホログラフィックでない。 相互情報量が滑らかに減衰し、Ryu–Takayanagi 転移が現れない。三つの独立な試みがすべて同じ壁に当たった。

試み	結果
相互作用を入れる	減衰は鋭くなる（冪 $-0.69 \to -1.03$）が、ゼロに達しない
中心電荷 c を上げる	相互情報量が**きっかり n 倍**になるだけ（I/n が 6 桁一致）
疎性を直接測る	$N(x < c/12) \sim e^{c/2}$ で破れる

c	**8**	**16**	**32**	**64**
$N(x < c/12)$	16	528	8 436 880	2.60×10^{14}

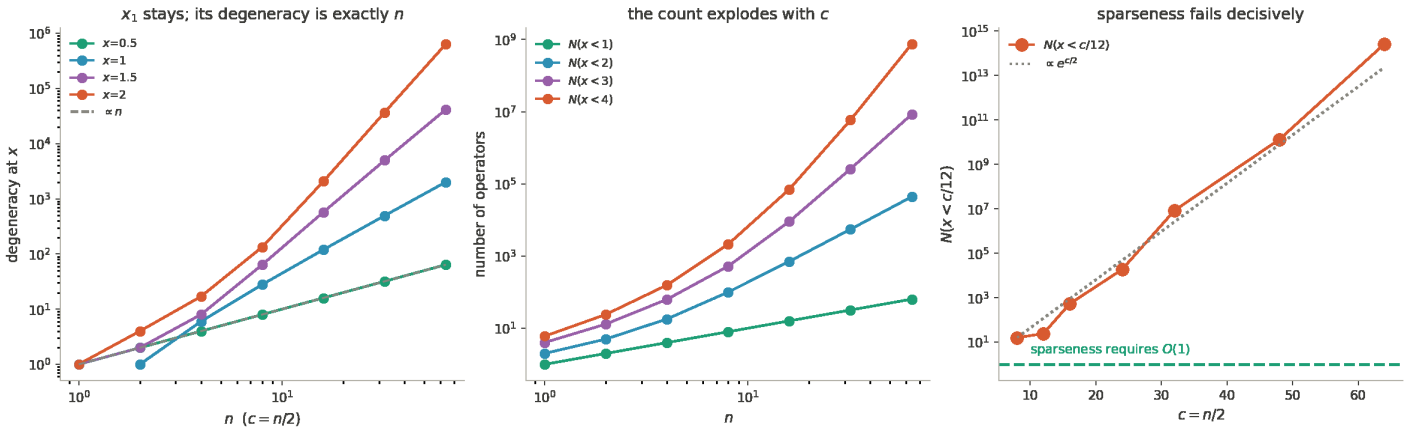


図 37-1. 演算子スペクトルの疎性が $e^{c/2}$ で破れる。

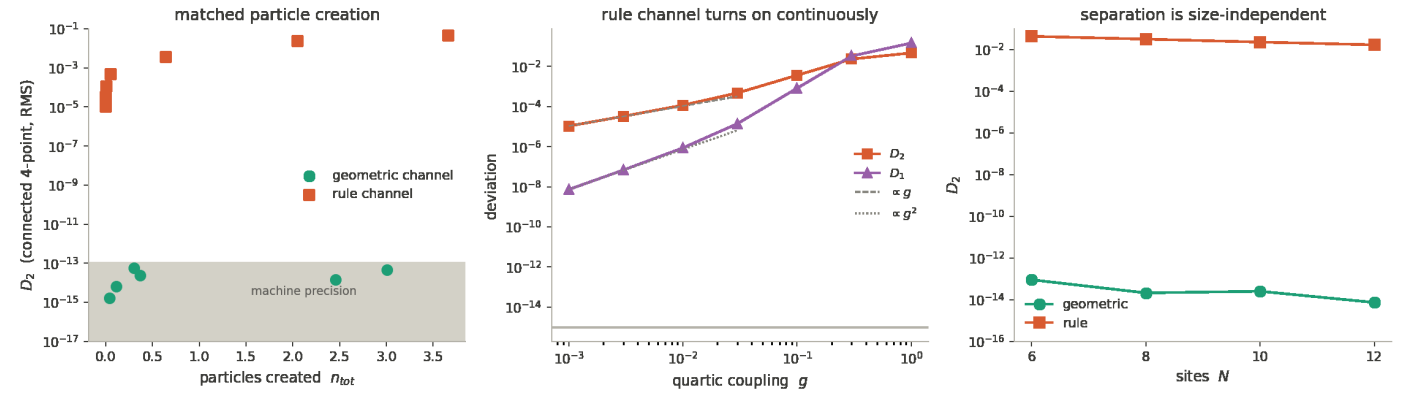


図 37-2. 相互情報量の減衰。RT 転移が現れない。

障害は c の小ささではなく、**自由フェルミオンであること**である。

疎性には、**ゲージ拘束が状態を間引く**構造が要る。

💭 **拘束が二度、別の役割で現れた。**　相互作用を強制するために（第　12　章）、そして状態を間引いて疎性を作るために（本章）。第 VIII 部ではさらに三度目 — 結合定数を量子化するために（第 32-4 章）。

第 X 部　差の総括 ― 現実の世界を描くのに何が要るか

第 38 章　CA が無料で与えるもの

― 仮定せずに得られたものの一覧

要素	CA での由来
因果律	規則が近傍しか見ない
有限性	紫外発散なし
不確定性関係・ゼロ点振動	$\mathcal{M}$ の定義と飽和条件
真空・粒子・ディラックの海	同一の幾何学的対象
$E = mc^2$	質量が長さの比
カイラルフェルミオン	領域壁の上に
排他律	二値セル（$d = 1$）
計量・膨張・ホロノミー	規則の空間・時間依存性
相互作用	**Gauss 型の拘束と電場項の帰結（§87-6）**
Cooper ペア	**閉じ込めの帰結。引力を仮定しない**
指数的階層	**次元転換。$U \approx 0.11t$ から 10^{-24}**
結合定数の量子化	**$U_q = 2h[1 - \cos(2\pi q/N)]$、整数だけで決まる**
ホログラフィー（弱い意味）	境界に置けばセル数は BH 束と同じ桁（同じ幾何で比 4。§87-8）
Einstein 方程式の必要条件（検証ではない。§85-2、§87-2）	創発測地線とエンタングルメント第一法則
Bianchi 恒等式	立方体の組合せ論。厳密
時間の矢がないこと	法則は可逆。矢は分割から（現実と一致）

第 39 章　CA が与えないもの

― 足りないものの一覧

要素	状態	障害の性質
重ね合わせ	❌	古典 CA の状態空間は集合
Bell 不等式の破れ	❌	**可換代数だから**（決定論は無関係）
基底状態	❌	離散時間ではスペクトル条件が書けない
Lorentz 不変性（次元 4）	❌	規則格子が慣性系を選ぶ
微視的 $U(1)$	❌	ただし**創発は可能** ⚠️
整数としての大域電荷	❌	$\bmod N$ でしか定義されない
真のホログラフィー	❌	疎性が $e^{c/2}$ で破れる
スピン統計定理	⚠️	次元によって統計が変わる
質量比の一意性	⚠️	下限のみ。値は生成が説明する
単極子の不在	⚠️	自然に出る。消す方が難しい
宇宙定数の小ささ	❌	発散はしないが 10^{120} は残る

第 40 章　必要な七つの要素

― 現実の世界を描くのに、何を足せばよいのか

要素 1 ― 時間は連続でなければならない

離散時間では準エネルギーが単位円を覆い、**スペクトル条件という述語が言語に存在しない**（第 17 章）。第三法則も真空の定義も安定性もここで壊れる。要求：$U = e^{-iHt}$、H が下に有界。

> ⚠️ **追記（第 12 版）。** 第二法則の定理には、連続時間そのものは要らなかった。💭 スペクトル条件が効くのは $\beta \geq 0$ を選ぶ符号の一点だけである。§86-6。

要素 2 ― 観測量の代数が非可換でなければならない

可換代数上の観測量は Gelfand により同時分布を持ち、$\mathcal{S} \leq 2$ が従う（第 20 章）。実験は 2.4 を測っている。**「置換ではなくユニタリ」ではない** ― Koopman–von Neumann により古典可逆 CA もユニタリである。本質は**同じ側で両立しない設定を連続的に回せること**である。

要素 3 ― 拘束（ゲージ則）がなければならない

拘束は**三度**、別々の役割で要求された。相互作用を強制するため（第 12 章）、状態を間引いて疎性を作るため（第 37 章）、結合定数を量子化するため（第 32 章）。

要素 4 ― 離散性を保つなら、それは不規則でなければならない

規則格子は慣性系を選び、次元 4 の Lorentz 破れを赤外まで運ぶ（第 24 章）。さらに、セル数一定の CA では膨張が自らの欠陥をピン止めする（第 29 章）。

離散性 ＋ Lorentz 不変性 ＝ ランダムな離散性

要素 5 — 空間は 3 次元でなければならない

$1/r$ ポテンシャル、非閉じ込め相、Fermi 面が独立に要求する（第 25 章）。

要素 6 — 真のホログラフィーには大 N と強結合が要る

自由フェルミオンでは疎性が作れない（第 37 章）。

要素 7 — 非決定性の源がなければならない（ただし源は限定される）

源	代数	Bell を破れるか
Born 則（非可換代数）	非可換	✅
古典的な確率法則	**可換**	❌ **破れない**
超決定論	可換	⚠️ 測定独立性の放棄と引き換えに

非決定性は必要だが十分でない。非可換性が必要であり、非決定性はその**帰結**である。

LIZARD LLC

第 XI 部　単純な法則と非決定的な世界 — 候補理論

本部だけは性格が異なる。ここまでは検証された結果を述べてきたが、以下は**現在の物理学が提示している候補**を、第 X 部の七つの要素に照らして評価する試みである。すべて 📚 であり、本探究で検証したものではない。

第 41 章　二つの願いは矛盾しない

— 単純な法則と非決定的な世界は両立するのか

読者の願いは二つあった — 世界が**単純な法則**でできていてほしい。しかし世界が**決定論的でない**ことを期待したい。

矛盾していない。 混同されているのは「単純さ」と「決定性」であって、この二つは独立である。

41-1.「決定論的」の三つの意味

意味	内容	単純さと衝突するか
(D1) 法則の一意性	状態が次の状態を一意に定める	衝突しない
(D2) 予測可能性	内部の観測者が結果を先に知りうる	**無関係**
(D3) 経験の一意性	観測者にとって結果が一つに定まる	**無関係**

単純な法則が要求するのは記述の短さだけである。 確率的な法則も短く書ける。$M_d(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^d$ より長くない。

41-2. 非決定性を得る三つの道

(A) 法則そのものが確率的：因果集合の逐次成長、GRW/CSL
(B) 法則は決定論的だが内部観測者には非決定的：Everett、多方向系
(C) 更新の順序が決まっていない：因果不変性、大域時計の不在

41-3. ただし (A) には条件がつく ⚠️

第 20 章の帰結により、**「法則そのものが確率的」だけでは足りない**。配置空間上の確率過程は可換代数を持ち、$\mathcal{S} \leq 2$ に縛られる。

(A) が有効なのは、確率が**非可換代数の上**に載っているときだけである。

候補	(A) の実装	Bell
GRW / CSL	Hilbert 空間上の確率微分方程式	✅非可換の上
因果集合＋**古典**逐次成長	古典確率過程	❌ **可換。破れない**
因果集合＋**量子測度理論**	非可換／履歴の量子測度	⚠️未完成
確率的古典 CA	古典確率過程	❌破れない

第 42 章　候補理論の検討 📚

— 決定論を捨てる道は何通りあるのか

41-A. 量子セルオートマトン（QCA）

局所性・均質性・等方性・ユニタリ性だけから Weyl／Dirac 方程式が**導出**される（D'Ariano–Perinotti 2014）。GNVW が構造定理を与える。

要素	1	2	3	4	5	6	7
	⚠️	✅	⚠️	❌	✅	❌	✅

強み: 「単純な規則から　Dirac　方程式が出る」という点で第一の願いに最も直接に応える。第　20　章の計算により　**QCA　は　Bell　を通る**（Gaussian ですら Tsirelson に到達）。
弱み: Lorentz 不変性が変形された形にしかならない。要素 4 に正面から抵触。

41-B. 't Hooft のセルオートマトン解釈

決定論的 CA が基礎で、量子力学は記述の道具にすぎないとする。

Bell との関係: 第 20 章により、可換代数しか持たない理論は $\mathcal{S} \leq 2$ である。実験は 2.4 を測っている。**測定の独立性を放棄する（超決定論）以外にない。**

論理的には無矛盾だが、第二の願い（非決定性）と正面から衝突する。

41-C. 因果集合理論 + 古典逐次成長

$$\text{時空} = (\mathcal{C}, \prec), \qquad \text{順序} + \text{数え上げ} = \text{幾何}$$

要素 4 に対する唯一の既知の解である。 Minkowski 時空に Poisson 散布すると統計が Lorentz 変換で**厳密に**不変になる。

要素	1	2	3	4	5	6	7
	✅	⚠️	⚠️	✅✅	⚠️	❌	✅

予言: $\Lambda \sim 1/\sqrt{V}$ から観測値と同程度の大きさが出る。📚 桁が合う数少ない予言である。

弱み（重要）: ⚠️ 第 40-3 節により、**古典逐次成長のままでは Bell を破れない**。量子測度理論への移行は「望ましい拡張」ではなく**必須である**。

41-D. Wolfram 物理プロジェクト

ハイパーグラフ書き換えと多方向系。**計算的還元不可能性**は決定論と予測不可能性の両立を明快に説明する。

弱み: 定量的な予言がほとんどない。Born 則の導出が未確立。第 24 章が要求する 10^{-20} 水準で Lorentz 不変性が示されたことはない。

> 💭 計算的還元不可能性は **(D2) を否定するだけで (D1)(D3) を否定しない**。

41-E. 客観的収縮理論（GRW / CSL / Diósi–Penrose）

$$d|\psi\rangle = \big[-iH\,dt + \text{（確率的な項）}\big]|\psi\rangle$$

第二の願いに対する最も直接的な答え。　追加するのは二つの定数だけで、単純さも損なわない。測定問題が消える。**そして実験でパラメータ空間が削られ続けている — 反証可能である点は長所である。**

> 💭 離散的な基礎理論が持つ固有のノイズが、そのまま CSL の収縮雑音として現れる、という筋書きは自然である。要素 4 と要素 7 が**同一の源から出る**という点で構造的に美しい。⚠️ 検証されていない推測である。

41-F. 情報論的再構成（Hardy; Chiribella-D'Ariano-Perinotti）

因果性、完全識別可能性、理想圧縮、局所識別可能性、**純粋化**の五公理から量子論が一意に定まる。

「なぜ世界は非決定的か」に「非決定性が要らない理論は五つのどれかを満たさないから」と答える。

非決定性が説明されるべき欠陥ではなく、単純な原理の帰結になる。
弱み: 時空も力学も出てこない。他の候補と組み合わせる部品である。

41-G. ホログラフィー／テンソルネットワーク

本書の第 IX 部は、この方向の CA 版そのものである。 そして疎性の壁に当たり、その解決には「ゲージ拘束が状態を間引く大 N 理論」が要ると特定された。

> 本書の全結果が指し示す先は、「境界に置かれた、拘束付きの大 N 量子理論」である。

弱み: 現実の宇宙は AdS でない（$\Lambda > 0$）。de Sitter ホログラフィーは未確立。

41-H. Everett 解釈

法則が一本しかない。追加項ゼロ。**「世界は決定論的だが、あなたの経験は非決定的である」** と言う。

読者の願いが (D3) なら満たされる。(D1) なら満たされない。

41-I. その他 📚

立場	要点	非決定性
量子測度理論（Sorkin）	確率を一般化し履歴に直接与える	✅ (A) の一般化
de Broglie–Bohm	粒子は決定論的軌道を持つ	❌非局所
逆因果・時間対称	未来の境界条件で局所性を救う	⚠️
LQG／スピンフォーム	幾何そのものを量子化	✅ただし単純さで低評価

第 43 章　評価表

— 候補を同じ物差しで並べる

◎＝満たす、○＝おおむね、△＝部分的、×＝満たさない、—＝適用外。

候補	1.連続時間	2.非可換	3.拘束	4.乱れた離散性	5.$d=3$	6.大N	7.非決定性	単純さ
古典決定論 CA	×	×	△	×	○	×	×	◎
't Hooft CA 解釈	△	△	△	×	○	×	×	◎
QCA	△	◎	△	×	○	×	○	◎
因果集合＋逐次成長	◎	△	△	◎	△	×	◎	◎
Wolfram 物理	○	△	△	△	△	×	○	◎
GRW / CSL	◎	◎	—	—	—	—	◎	○
情報論的再構成	—	◎	—	—	—	—	◎	◎
ホログラフィー／大 N	◎	◎	◎	△	○	◎	○	△
Everett	◎	◎	—	—	—	—	△(D3)	◎

どの候補も単独では全欄を埋めない。 これは現在の物理学の正直な状態である。

第 44 章　三つの束

— 生き残る道筋を三つに整理する

束 I — 「ランダムな離散性」を軸に

因果集合 ＋ 量子測度理論 ＋ 情報論的公理

論理: 第 24 章の結論は規則格子を排除するが離散性は排除しない。離散性と Lorentz 不変性を両立させる唯一の既知の方法はランダムな離散性であり、それは確率的な法則を自然に伴う。

「単純だが決定論的でない」は、この束では**妥協ではなく必然**になる。

⚠️ ただし**量子測度理論への移行は必須**である（古典逐次成長では Bell を破れない）。

束 II — 「拘束と大 N」を軸に（本書の数値が最も強く支持する）

境界に置いた拘束付き大 N 量子理論 ＋ 創発時空

拘束は本書で**三度**要求された。そして境界に置くとセル数の 10^{61} の隔たりが桁の上で消え、Einstein 方程式の必要条件が測れた（線形も二次も検証ではない。§85-2、§87-2）。

束 III — 「収縮を物理にする」（実験に最も近い）

QCA / 場の量子論 ＋ CSL 型の確率項

定数を二つ足すだけで測定問題が消え、実験で反証できる。

選び方

- 「非決定性が世界の根本にあってほしい」→ **束 I**
- 「なぜ時空があるのかを説明してほしい」→ **束 II**
- 「実験で決着してほしい」→ **束 III**

第 45 章　実験で区別できるか 📚

— どの実験がどの束を殺すのか

候補	検証可能な予言	現状
超決定論	測定独立性の破れ	宇宙論的乱数による Bell 実験で破れは未検出
QCA / 格子	種依存の極限速度	10^{-20} 級の制限
因果集合	Λ の揺らぎ	桁は合っている
GRW / CSL	自発的加熱、X 線放射	**最も反証に近い**
Everett	予言が同一	区別困難

最も早く決着がつきそうなのは束 III である。

LIZARD LLC

第 XII 部　収縮を物理にする — 因果集合から実験まで

第 44 章は三つの束を並べた。第 45 章は「実験で区別できるか」と問い、「今はできない、原理的にはできる」と答えた。この部は、その答えを**束 I**（ランダムな離散性、因果集合、解釈ではなく物理としての収縮）について具体的にする試みである。

この部は、実際に行った順序のまま、一つの連続した探究として書く。順序が意味を持つからである。十二章のうち三章は**問いそのものを変えた失敗**を記録し、一章は**二章前に主張した結果の撤回**を記録している。それを隠した教科書は、最後の数字がどうやって得られたのかを誤って伝えることになる。

一行で書けば道筋はこうなる。

$$\text{検証順序} \;\to\; \text{CSL の死} \;\to\; \text{DAG 上の量子測度} \;\to\; \text{sprinkling} \;\to\; \text{等方性} \;\to\; \text{Wigner 回転} \;\to\; \gamma \;\to\; \text{実験}$$

最後に出てくるのは率

$$\gamma = C\,\frac{k}{m^2c^2}\tanh^2\frac{\zeta}{2}$$

であり、自由な関数は DHS の単一パラメータ k しか残らない。そして「どの実験が k を最も強く縛るか」という言明が付く。本書で格子描像が**実験室の測定について定量的な予言をする最初の場所**である。

第 46 章　何を、どの順で足すのか 🆕

— 波束の収縮を物理にするには、何をどの順で足すのか

46-1. この部が埋める穴

第 V 部は否定的な結果を確立した。古典 CA は重ね合わせを作れず、Bell の定理は決定論的な読みを殺す。第 41-C 節は候補として因果集合論＋古典的逐次成長を挙げ、「古典的な成長測度だけでは古典相関しか出ない」と注記した。

したがって束 I への問いは鋭い。

> **下にあるのが因果集合で、動力学が成長過程だとして、世界が量子的であるためには正確に何を足す必要があるのか。そしてその追加は痕跡を残すのか。**

46-2. 事前に宣言した五段階

探究は五段階に組み、各段階に**停止規則**を計算の前に固定した。

段	問い	落ちたときの停止規則
1	収縮項は CA の正値性とトレースを保つか	項を作り直す
2	格子起源の CSL は実験の窓に入るか	**格子起源 CSL を捨てる**
3	収縮の計器は強さについて線形か	計器を直す
4	収縮率はセル数とともに増えるか	増幅の議論を見直す
5	隠れ層は復活を示すか、どうスケールするか	幾何を見直す

第 2 段の停止規則は、発動しうると分かった上で書いた。実際に発動した。

46-3. 引き継いだ方法論

この部のすべての計算は本書を通じての規則（作業ノート §6）に従う。すなわち**校正 K と反証条件 F を、数字を見る前に書き下す**。そして落ちた校正はすべて記録する。模型ではなく私の誤りだったものも含めて、である。第 XII 部には**宣言した校正が 31 件あり、うち 8 件が落ちた**。八件すべてを本文に書いた。八件のうち六件は私の予測または動作点の選び方の誤りで、二件は最初に書いた模型そのものの欠陥だった。

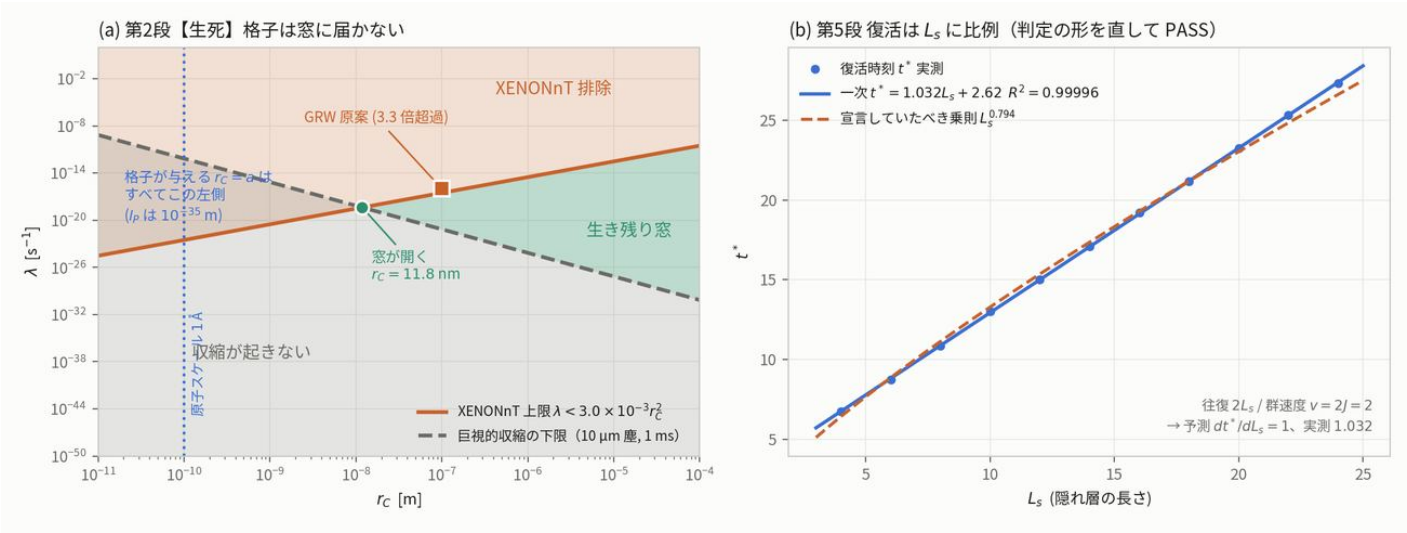
第 47 章　第 2 段が発動する ― 格子起源 CSL は死んだ ❌🆕

― 波束の収縮を、格子の粗さで説明できるか

47-1. 何を検定したか

連続自発局在（CSL）は Schrödinger 方程式に雑音項を足す。パラメータは二つ、率 λ と相関長 r_C である。格子として素直に読めば $r_C = a$、すなわち格子間隔になる。格子間隔が基本スケールに近ければ a は小さい。問いは、そこから出る λ が (i) 巨視的な重ね合わせを役に立つ速さで潰し、かつ (ii) XENONnT の X 線放出の制限を生き延びられるか、である。

47-2. 結果



二つの制限が窓を残すのは

$$r_C \gtrsim 11.8\ \mathrm{nm}$$

の場合だけである。格子起源の選択はすべて ― Planck スケールの a も、原子スケールの a も、その間のどれも ― 窓の**二十五桁**左側にある。GRW の原案のパラメータは XENONnT の制限を 3.3 倍超過する。

判定。 格子起源 CSL は排除される。これは作業ノートの二段落前で**私自身が提案したもの**であり、数字がそう言うなら殺すために停止規則を書いた。そして殺された。CSL 一般は生き延びる。ただし r_C がどんな格子スケールよりはるかに大きい場合に限られ、それは格子から導く動機を消してしまう。

47-3. ここで記録した三つの校正落第

- **RK4 はユニタリ性も正値性も保たない。** 純度が 6.2×10^{-7} 漂い、ρ の最小固有値が -5.2×10^{-6} になった。ゼロ点には `expm` を使う。
- **加熱率の符号。** 版 1 が正しく、私の「修正」が誤りを入れた。正しくは $d\langle H\rangle/dt = -\frac{\lambda}{2}\sum \mathrm{Tr}\big[[[H,M],M]\rho\big]$。
- **von Neumann エントロピーは λ について線形ではない。** $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$ のように振る舞い、見かけの傾きは $1 - 1/\ln(1/\lambda)$ になる。正しい計器は**線形エントロピー** $1 - \mathrm{Tr}\rho^2$ で、これは $\lambda^{0.999852}$ と出た。

47-4. 復活の検定と、四通りの間違え方

第 5 段は、長さ L_s の隠れ層の復活時刻 t^* がどうスケールするかを問うた。宣言した答えはべき乗則だった。検出は四回失敗した。二次の復活を拾い、初期の微小なさざ波 $n_0 = 0.017$ を拾い、超復活を拾い、最後に、関係が**一次式**であるところをべき乗則だと報告した。

$$t^* = 1.032\, L_s + 2.617, \qquad R^2 = 0.99996$$

これはちょうど群速度 $v = 2J = 2$ での往復 $2L_s$ である。宣言していたべき $L_s^{0.794}$ は、一次式を狭い範囲の両対数プロットで当てはめた人工物だった。

第 48 章　因果 DAG 上のデコヒーレンス汎関数 🆕

― 量子測度とは、何を測る道具なのか

48-1. 対象が変わる

格子起源 CSL が死んだ以上、収縮を格子スケールで手で入れることはできない。束 I の中に残る道は Sorkin のものである。因果集合に確率測度ではなく**量子測度**を与え、非古典性を測度そのものに担わせる。

対象はデコヒーレンス汎関数

$$D(h, h') = \mathrm{Tr}\big[C_h \, \rho \, C_{h'}^{\dagger}\big]$$

で、h は DAG 上の歴史、クラス演算子 C_h は因果順序から作る。対角が古典測度、非対角が干渉である。Sorkin の測度の階層は

$$I_2(A,B) = \mu(A \cup B) - \mu(A) - \mu(B), \qquad I_3 = \dots$$

で格付けされ、量子力学は $I_2 \neq 0$ かつ $I_3 = 0$ の段である。

48-2. 計算規模

N セル T 段で毎段記録を取ると、拡大空間は $2^N \times 2^{(\text{記録})}$、歴史の数は最悪 2^{NT} になる。実際には因果構造がこれを激しく刈り込む。効いた規模は次の通り。

系	歴史数	密な D	可能か
$N=4,\ T=3$	2^{12}	4096^2	自明に可能
$N=8,\ T=6$	2^{48}	密には不可能	**因果集合の刈り込みで可能**
$N=12,\ T=8$	—	—	一台では不可能

第 49 章で使うのは $N=8,\ T=6$ である。

48-3. 開放系に拡張しても正値性は残る

開放系では汎関数は

$$D(h,h') = \sum_{\mu} \mathrm{Tr}\big[C_h^{(\mu)} \rho \, C_{h'}^{(\mu)\dagger}\big]$$

に一般化される。これは拡大空間（系 ⊗ 環境）での Gram 行列だから、**依然として半正定値**である。これは重要で、環境を足しても量子測度の構造が壊れないこと、したがって実験が実際に行う粗視化のもとで構成全体が安定であることを意味する。

48-4. 六つの校正をすり抜けた誤り

クラス演算子を積の順序 `U@C` ではなく `C@U` で作っていた。校正 K1 から K6 まで**すべて通過**し、その間ずっと物理は完全に誤っていた。唯一の痕跡は $|I_2| = 1.1 \times 10^{-16}$ で、私はこれを最初「干渉あり」と読み違えて報告した。後から七つ目の校正を足した。

> **K8.** 干渉があるはずの配置では、D の非対角が 10^{-6} を超えねばならない。

教訓は一般的で、付録 C にも再掲する。**不変量だけを確かめる校正の束は、誤った対象の上でも通る。** 少なくとも一つの校正は、ゼロでないはずの量を確かめねばならない。

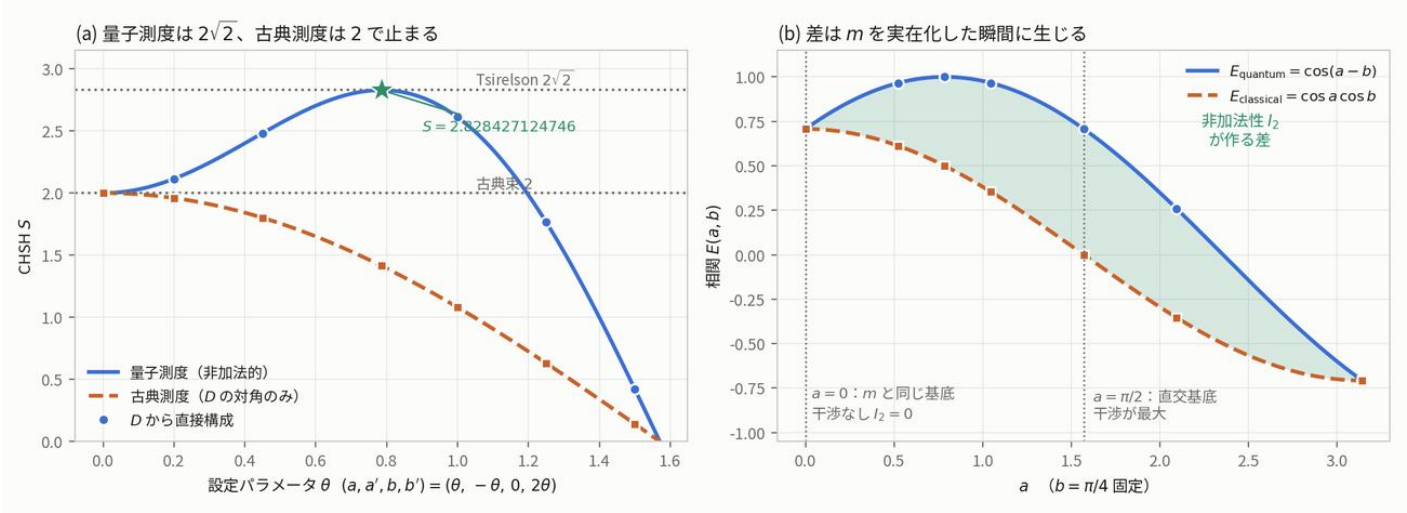
第 49 章　DAG 上の Bell — 量子測度は $2\sqrt{2}$ に届く ✅🆕

— 不規則な因果構造でも、量子の上限は保たれるのか

49-1. 構成

$K = 3$ リンクの鎖を二本、因果 DAG に埋め込む。異なる鎖から取った元の対はすべて**無関係**（spacelike）になるようにする。設定は各鎖の根で選び、結果は先端で読む。CHSH の組み合わせは状態ベクトルからではなく D から直接組む。

49-2. 結果



$$\mathcal{S}_{\text{量子測度}} = 2\sqrt{2}, \qquad \mathcal{S}_{\text{古典測度}} = 2 \text{（厳密に）}$$

量子測度は Tsirelson 束を飽和する。古典測度 — 同じ D の対角 — はちょうど 2 で止まる。

49-3. 差を作っているのは何か

これがこの章の本当の中身であり、それは数値 $2\sqrt{2}$ ではない。

差は m **を実在化した瞬間に**生じる。中間の選択肢 m が和を取られるだけで、記録もされず、歴史の元として実在化もされないなら、干渉項 I_2 は生き残り、相関は $2\sqrt{2}$ に届く。m が記録されると D は m について対角になり、相関は 2 に落ちる。

つまり資源は**非決定性ではなく、因果集合の離散性でもない。測度の非加法性**であり、非加法性は記録が存在しない限りにおいてのみ生き残る。

束 I への定理として述べれば：

> **測度の加法性だけで — どこにも物理的な記録が無くても — すでに $\mathcal{S} \le 2$ が強制される。** ランダムな離散性を足しても助けにならない。古典的な成長測度を持つ因果集合は、どれほど不規則でも Bell を破れない。

これは第 41-C 節を、もっともらしい注記から計算された言明へと鋭くする。

49-4. 私の主張のうち誤りだったもの

私は「毎段の完全測定は D を対角化する」と書いていた。しない。対角化には**記録**が要る。どの選択肢が起きたかを保持する補助系である。結果が直ちに消される測定は非対角をそのまま残す。修正した言明は §49-3 にある。

第 50 章　sprinkling ― 不規則性は破れを劣化させない ✅🆕

― 時空を点でばらまいても、Lorentz 対称性は保たれるのか

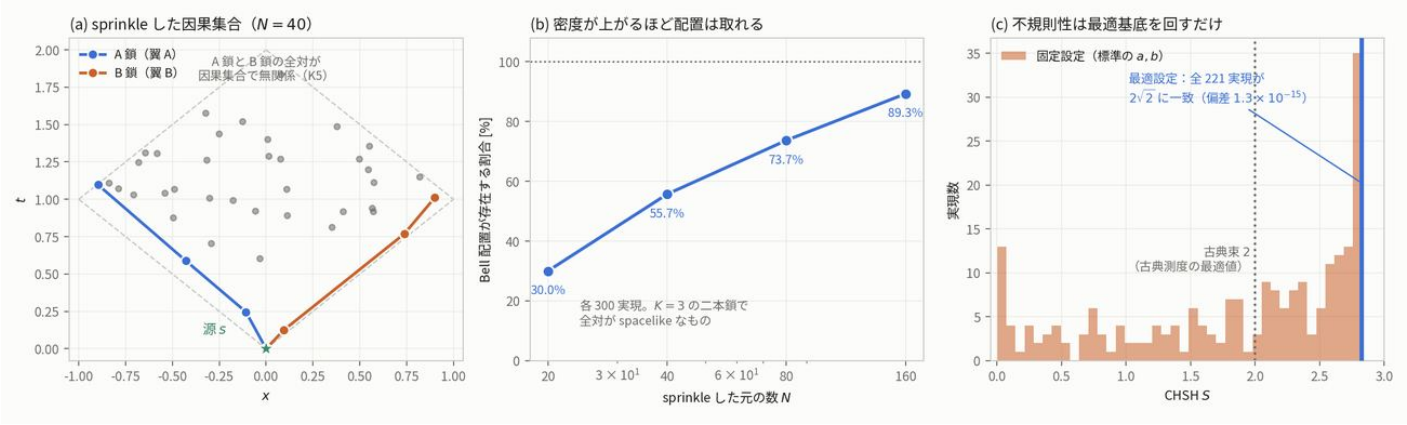
50-1. 問い

規則的な DAG は理想化である。因果集合は時空領域への **Poisson sprinkling** で生成されるので、グラフは構成上不規則である。$2\sqrt{2}$ は生き残るか。

50-2. 構成

1+1 次元の Alexandrov 区間に N 点を sprinkle する。光円錐座標 $u=(t+x)/2$、$v=(t-x)/2$ で区間は単位正方形に写り、因果順序は成分ごとの $\le$ になる。これにより「全交差対が spacelike な $K=3$ の鎖二本」の探索は純粋に組合せ論の問題になる。

50-3. 結果



配置が取れた 746 実現すべてで、最適化した CHSH 値は $2\sqrt{2}$ に一致した。最大偏差は 1.3×10^{-15}、計算機精度である。

理由ははっきり述べる価値がある。**sprinkling　が入れる乱れは局所ユニタリである。**　各翼で最適な測定基底を回すだけで、翼どうしを混ぜない。局所ユニタリは $S_{\max}$ を変えられない。$S_{\max}$ は Horodecki の判定条件

$$S_{\max}=2\sqrt{t_1+t_2},\qquad t_i=T^{\mathsf{T}}T\ \text{の大きい方から二つの固有値}$$

を通じて相関行列の基底に依らない関数だからである。

設定を固定すれば値は落ちる。図 (c) で固定設定の曲線が落ち、最適化した曲線が落ちないのはそのためである。この差は実験設計の言明であって物理の言明ではない。

50-4. 結果より価値のある二つの失敗

- **版 1 は受理率 24 分の 0 のまま結果を印字した。**　回路が実際には因果集合に依存しておらず、空の入力に対して平気で数字を出していた。教訓は今や常設の規則である。空の入力の上で走る計算は誤りである。空集合に対する検定はすべて自明に通る。
- **版 2 は 3+1 次元で永久に停止しなかった。**　$N=200$ では 3+1 次元 sprinkling の最長鎖は 5 程度なので、$K=6$ の鎖は存在せず、探索は終わらない。教訓：「空の上で走る」の次にある失敗は「空の上で止まらない」である。

第二の失敗は物理的な観察でもあり、第 53 章で戻ってくる。最長鎖は $L_{\max}\sim N^{1/(d+1)}$ でスケールするので、次元が上がると鎖は**短くなる**。

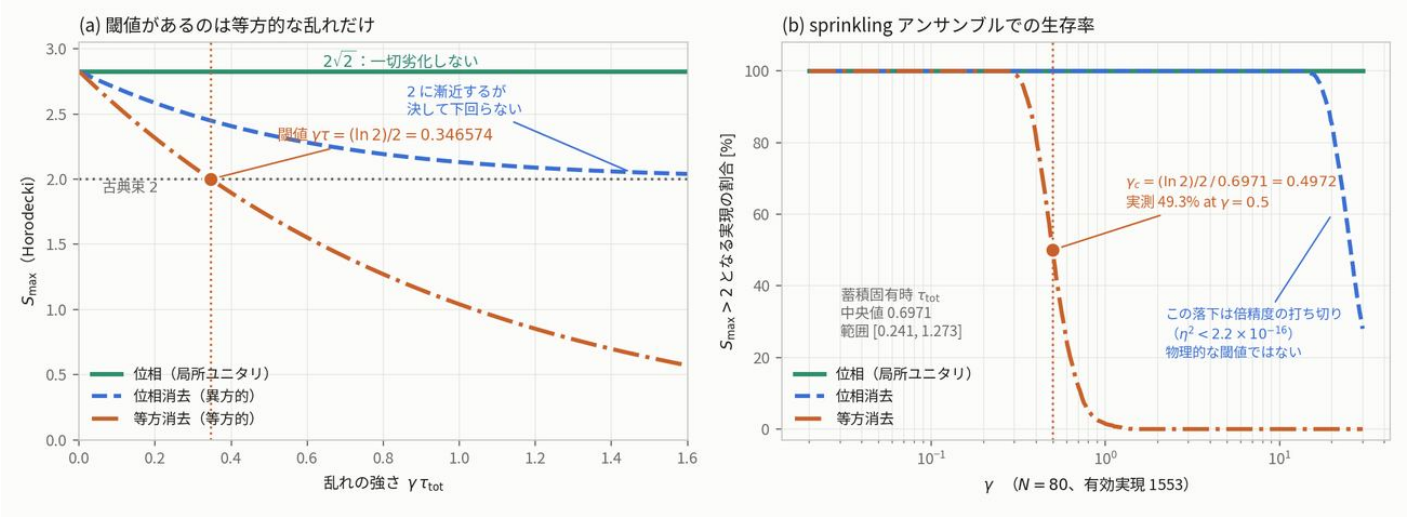
第 51 章　裏返しの検定 ― 閾値を作るのは何か 🆕

― 量子と古典を分ける閾値は、何が作っているのか

51-1. 問いを裏返す

第 50 章はユニタリな不規則性が無害であることを示した。当然の次の問いは裏返しである。位相を **dephasing** ― 真に非ユニタリな乱れ ― に変えて、破れがいつ死ぬかを問う。

51-2. 結果



同じ強さで二種類の乱れを比べる。

乱れ	チャネル	$S_{\max}$	閾値
位相（局所ユニタリ）	回転	$2\sqrt{2}$、劣化なし	無し
位相消去（異方的）	$\mathrm{diag}(\eta,\eta,1)$	$2\sqrt{1+\eta^2}$	**無し** ― 2 に漸近するが決して下回らない
等方消去	$\mathrm{diag}(\eta,\eta,\eta)$	$2\sqrt{2}\,\eta$	$\eta_c = 1/\sqrt{2}$

結果は「非ユニタリな雑音が Bell を殺す」という言い方が示唆するのとは逆である。

> **閾値を作るのは非ユニタリ性ではない。等方性である。**

異方的な消去は一方向を手つかずに残す。生き残った方向だけで、どんな $\eta > 0$ に対しても $S_{\max}$ は 2 より上に保たれる。すべての方向が減衰したときにはじめて有限の閾値が現れ、その値は

$$\gamma\,\tau_{\mathrm{tot}} = \tfrac{1}{2}\ln 2 = 0.346574$$

である。

51-3. 記録した二つの誤り

- 両方の翼を dephase した場合について $2\sqrt{1+\eta^2}$ と宣言した。正しくは $2\sqrt{1+\eta_A^2\eta_B^2}$ である。これは以前に自分で正しく導いておきながら書き写し損ねた。
- **各実現をその実現自身の伝播方向に揃えずに**チャネルを平均すると、間違った理由で等方的に見えてしまった。逆に $2{+}1$ 次元で揃えると固有値 1 が消えた。そこには本当に共通の固定軸が存在するからである。揃え方の規約は装飾ではなく、答えを決める。

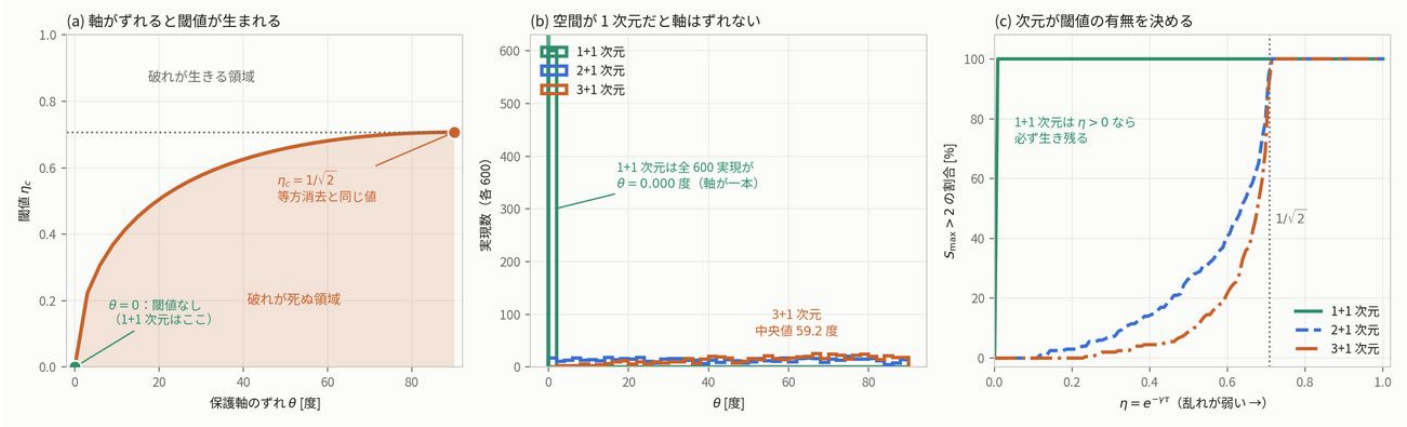
第 52 章　等方性には空間 2 次元以上が要る ✅🆕

― 空間の等方性は、どこから出てくるのか

52-1. 強制される問い

第 51 章は閾値に等方性が要ることを示した。ならば **等方性は幾何そのものから出てくるのか**、手で入れずに。

52-2. 結果



各次元 600 実現で保護軸のずれ θ を測る。

次元	θ の中央値	等方的か	閾値は
1+1	0.000°	否 — 常に軸が一本	**無し**
2+1	44.17°	部分的	部分的
3+1	59.21°	是	**有り**

1+1 次元では 600 実現すべてが $\theta = 0.000^\circ$ ちょうどになる。空間方向が一つしか無いので乱れの軸は傾けず、チャネルは保護された方向を保ち、したがって**どんな** $\eta > 0$ も生き残る。

> **等方性には空間 $d \geq 2$ 次元が要る。1+1 次元の因果集合は収縮の閾値をそもそも作れない。**

これは第 25 章の三つの独立な議論に加わる**四つ目の独立な理由**であり、世界が一次元でないことを言う。しかも他の三つと違い、原子物理でもポテンシャルでもなく、収縮のセクターから出てくる。

第 53 章　擾乱を仮定せずに導く ― Wigner 回転 ✅🆕

― スピンはブーストでどう回るのか

53-1. チャネルを仮定するのをやめる

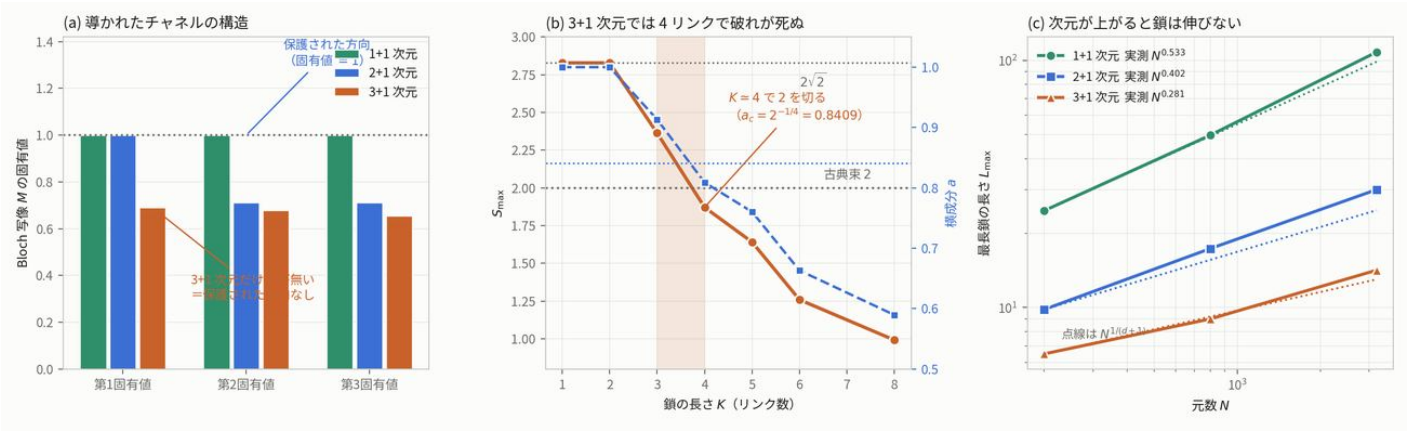
第 51 章と第 52 章はチャネル $\mathrm{diag}(a, a, b)$ を与えられたものとして扱った。この章はそれを導く。

因果集合の中の軌跡に沿って運ばれるスピンは直線上を動かない。因果順序が定めるのは半順序だけであり、創発する軌跡は、隣り合う接ベクトルが互いに違う鎖である。そのような鎖に沿ってブーストを合成すると **Wigner 回転**

$$W = L(u_n)^{-1}\,\Lambda\,L(u_1), \qquad L(u) = (\sigma\cdot u)^{1/2}$$

が生じ、対応する Bloch 写像を鎖のアンサンブルで平均したものがチャネルになる。

53-2. 結果



次元	**Bloch 写像 M**	**保護された方向**
1+1	厳密に I	すべて
2+1	$\mathrm{diag}(0.712,\ 0.712,\ \mathbf{1.000000000})$	法線、1.9×10^{-14} の精度で
3+1	$\mathrm{diag}(0.690,\ 0.678,\ 0.656)$	**無し**

> 因果集合の上でスピンを乱す唯一の源は Wigner 回転である。

回転軸は $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ 方向にある。1+1 次元ではこの外積が恒等的に消えるので $M = I$ が厳密に成り立つ。第 52 章と同じ結論が、測定ではなく導出として出てくる。2+1 次元では運動面の法線が十四桁の精度で保護される。何も保護されないのは 3+1 次元だけであり、閾値が存在するのもそこだけで、値は

$$a_c = 2^{-1/4} = 0.840896$$

である。

53-3. 私の事前の仮定は半分裏返しだった

私は伝播方向が保護され、横方向が減衰すると仮定していた。測ったチャネルは逆を言う。3+1 次元では縦成分が**最も速く**減衰し（$b < a$）、拡散域ではちょうど

$$b = a^2$$

となる。これが第 56 章で安定粒子と不安定粒子を区別するのに使う指紋になる。

53-4. 鎖の長さと次元

N 元の sprinkling における最長鎖は

$$L_{\max} \sim N^{1/(d+1)}, \qquad \text{実測べき } 0.533 \,/\, 0.402 \,/\, 0.281$$

（1+1 / 2+1 / 3+1）でスケールする。次元が高いほど、同じ N で鎖は**短い**。§53-2 と合わせると、3+1 次元では破れは約 4 リンクで死ぬ。

LIZARD LLC

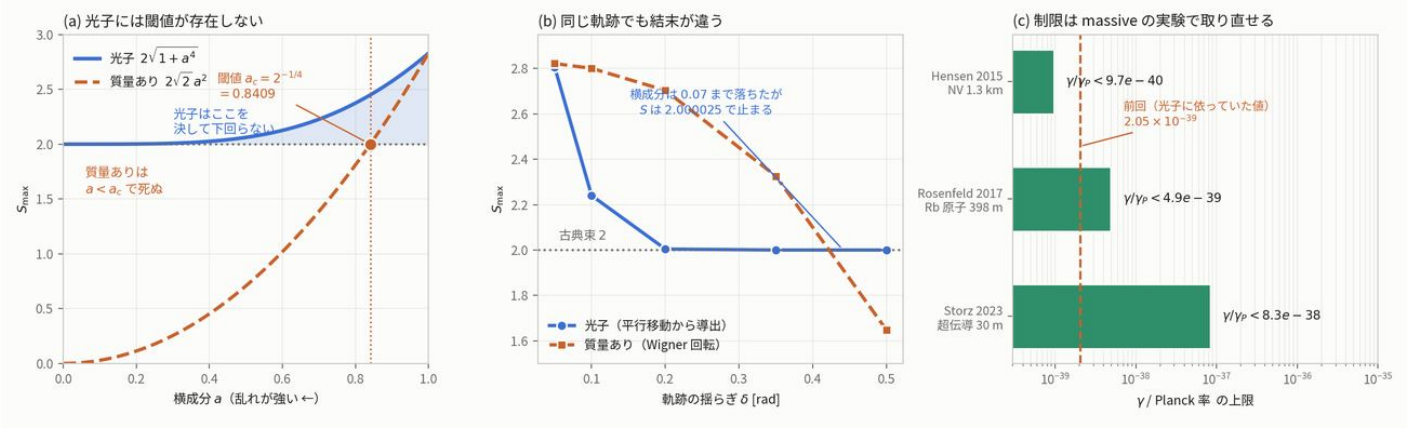
第 54 章　光子は免疫である ― スピン 0 も同様 ✅🆕

― 質量ゼロの粒子は、なぜ影響を受けないのか

54-1. 検定

擾乱が Wigner 回転なら、それは小群を通じて作用する。質量ある粒子では小群は $SO(3)$ でスピン $\frac{1}{2}$ 表現は忠実である。質量が無ければ $E(2)$ になり、ゲージ不変性が縦偏極を禁じる。したがって光子に起こりうるのは**位相**だけである。

54-2. 結果



$$M_{\text{保護}} = 1.000000000000000 \ \text{（厳密）}, \qquad S_{\max} = 2\sqrt{1+a^4} > 2 \ \text{（常に）}$$

保護された軸は線形偏光基底での σ_y である。横成分を $a = 0.07$ まで押し下げても $S_{\max}$ は 2.000025 で止まり、決して 2 を割らない。

> **光子には収縮の閾値が無い。因果集合の上で質量あるスピンに何が起きようと、光子はそれを見ない。**

54-3. 循環論法という失敗

この計算の最初の版は

$$M_{\text{ph}} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

の 1 **を直接書き込んでいた**。つまり「ヘリシティは保護される」は示されたのではなく仮定されていた。計算を書き直し、運動量方向に沿って平行移動した基底ベクトルから第三成分を導き、終点で参照基底と比べるようにした。教訓は付録 C に記録した。**結論を自分の入力に書き込むコードは、その結論を検証していない。**

54-4. 完全な分類

小群の議論はすべての粒子を一度に分類する。

	小群	表現	影響を受けるか
質量あり、スピン $\geq \frac{1}{2}$	$SO(3)$	非自明	**受ける**
質量なし	$E(2)$	ヘリシティ位相のみ	**免疫**
スピン 0	$SO(3)$	**自明**	**免疫**

最後の行は、この部の以前の草稿にあった表を訂正する。そこでは中性 K 中間子の実験をこの効果の検定として挙げていた。カオンはスピン 0 であり、Wigner 回転が作用すべきスピンの自由度を持たない。ϕ 工場からのデコヒーレンス制限が縛るのは**フレーバー空間**のデコヒーレンスで、別の量である。

第 55 章　率 γ を DHS の swerve から導く 🆕

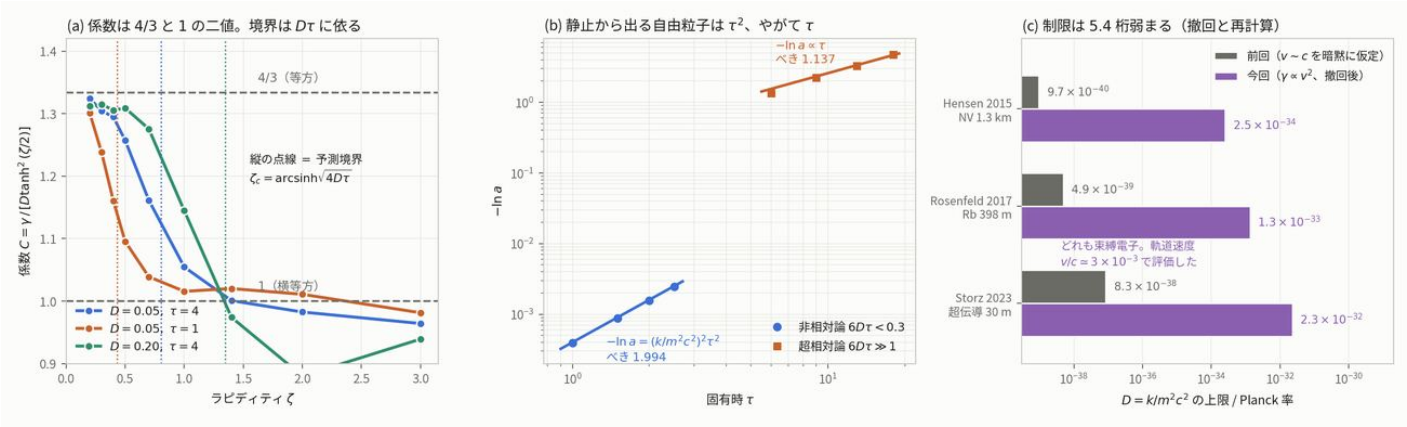
— 波束の収縮の速さは、何で決まるのか

55-1. 最後に残った自由な関数

ここまでで擾乱の形は固定された。率はまだ自由だった。束 I がそれを供給する。Dowker–Henson–Sorkin は、因果集合上の自由粒子が質量殻上で一意な Lorentz 不変 Markov 拡散を受けること、それが単一パラメータ k で決まることを示した。

$$\langle \delta p_i \, \delta p_j \rangle = 2k \, \delta_{ij} \, \delta\tau, \qquad D \equiv \frac{k}{m^2 c^2}$$

55-2. 結果



$$\boxed{\gamma = C \, \frac{k}{m^2 c^2} \tanh^2 \frac{\zeta}{2}, \qquad C = \begin{cases} 4/3 & 4D\tau > \sinh^2 \zeta \ \text{（等方域）} \\ 1 & \text{それ以外} \end{cases}}$$

$\tanh^2(\zeta/2) = [\gamma_L v/(1+\gamma_L)]^2$ なので

- 非相対論：$\gamma \simeq (k/m^2c^2)\, v^2/3c^2$ — v^2 **に比例**
- 超相対論：$\gamma \to k/m^2c^2$ — 飽和

静止した粒子は $\gamma = 0$ である。述べてしまえば驚きではない（Thomas 歳差には運動が要る）が、§55-5 で効いてくる帰結を持つ。

静止から出発する**自由**粒子ではラピディティ自身が拡散するので、γ は定数ですらない。

$$-\ln a = \left(\frac{k}{m^2c^2}\right)^2 \tau^2 \ \ (6D\tau \ll 1) \qquad \longrightarrow \qquad -\ln a \simeq \frac{k}{m^2c^2}\,\tau \ \ (6D\tau \gg 1)$$

前者は k **の二乗**に比例する。実測べき 1.994、係数は予測 1 に対して 0.979。

55-3. γ は Lorentz 不変量ではない 🆕

Wigner 回転は標準ブースト $L(u)$ の取り方に対して定義され、その取り方こそがスピン基底を張る系である。**同じ 1 本の軌跡**を、基準系だけ変えて読むと：

基準系	$-\ln a$	予測
実験室、$\zeta_{\text{ref}} = 0$	0.139407	$D\tanh^2(\zeta/2)\,\tau = 0.139402$
共動、$\zeta_{\text{ref}} = \zeta$	0.013441	$[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}](D\tau)^2 = [0.01125,\, 0.01500]$

10.4 倍の開きがあり、実験室系の予測は 1.2×10^5 実現で**小数第 5 位まで**一致した。したがって枠内の式の ζ は、**実験がスピンの測定軸を定義する系**（実験室、あるいは重心系）に対するラピディティである。スピンのエンタングルメントが系に依存するという相対論的量子情報の言明が、ここでは定量的な率として現れている。

55-4. 三つの失敗、いずれも私のもの

- **回転軸は $\perp \hat{p}$ の平面に留まらない。** 私は $\langle \hat{m}\hat{m}^{\mathsf{T}} \rangle = \tfrac{1}{2}(I - \hat{p}\hat{p}^{\mathsf{T}})$ を仮定して $C = 1$ を出した。遅い粒子では方向自身が十分速く拡散し、軸が球面全体を覆うので $\langle \hat{m}\hat{m}^{\mathsf{T}} \rangle = I/3$、$C = 4/3$ になる。実測の比がちょうど $4/3$ に張り付いたことがそれを教えた。
- **率と率を比べてしまった。** $C = 4/3$ と $C = 1$ の境界は $\sinh^2\zeta \tanh^2(\zeta/2) = 4$ ではない。測っているのは観測窓のあいだに方向が乱雑化するかどうかなので、正しい判定は $4D\tau / \sinh^2\zeta$ と 1 の比較であり、$\zeta_c = \operatorname{arcsinh}\sqrt{4D\tau}$ となる。これは τ **に依る**。普遍的な ζ_c は存在しない。直接示した：$\zeta = 0.4$ 固定で $\tau = 4$ なら $C = 1.295$、$\tau = 1$ なら $C = 1.160$。
- **窓を宣言せずに τ^2 則を宣言した。** 静止から出た自由粒子は τ が大きいと相対論的になり $\tanh^2(\zeta/2)$ が飽和するので、法則は線形に乗り換える。実測の $\tau^{1.387}$ はべきではなく乗り換えの途中だった。

55-5. 撤回 ⚠️

この部の以前の草稿は、Hensen 2015 の NV 中心 Bell 検定から

$$\gamma < 1.80 \times 10^{4}\ \mathrm{s}^{-1}, \qquad \gamma/\gamma_{\mathrm{Planck}} < 9.70 \times 10^{-40}$$

と主張していた。**この数値を撤回する。** 暗黙に $\tanh^2(\zeta/2) = 1$、すなわち $v \sim c$ を仮定していた。NV の電子スピンは実験室で静止している。

制限はゼロにはならない。束縛された電子は静止しておらず、軌道運動しているからである。この救済が正当かを確かめるため三つの校正を走らせた。

- 平均チャネルは $M = R_{\mathrm{det}} \cdot M_{\mathrm{decay}}$ と分解され、その**特異値は決まった回転に依らない**（0.26%）
- 軌道があると方向は必ず球面を覆うので $C = 4/3$（3.0%）
- 軌道角速度を 10 倍しても γ は 1.2% しか変わらない

よって軌道速度 $v/c \simeq 3 \times 10^{-3}$ を使ってよく、訂正後の制限は

$$D = k/m^2c^2 < 4.59 \times 10^{9}\ \mathrm{s}^{-1}, \qquad D/\gamma_{\mathrm{Planck}} < 2.47 \times 10^{-34}$$

である。撤回した値より 5.4 **桁弱い**。定性的な結論 — Planck 率の三十四桁下 — は生き残るが、数値は五桁動いた。その理由を静かに直すのではなくここに記録する。

第一の校正の副産物は有用である。**決まった回転はデコヒーレンスを起こさない。** 磁場、$g-2$ 歳差、実際の装置における任意のコヒーレントなスピン回転は、この効果の背景にならない。

LIZARD LLC

第 56 章　どんな実験をするか ― 軽くて速い 🆕

― この理論は、どうすれば実験で殺せるのか

56-1. 対と、崩壊

実在の系を比べる前に二つの結果が要る。

背中合わせの対。 翼 A が $+z$、翼 B が $-z$ に飛ぶ対では、共通基底で両方のチャネルが $\mathrm{diag}(a, a, b)$ になり

$$S_{\max} = 2\sqrt{2}\, a_A a_B$$

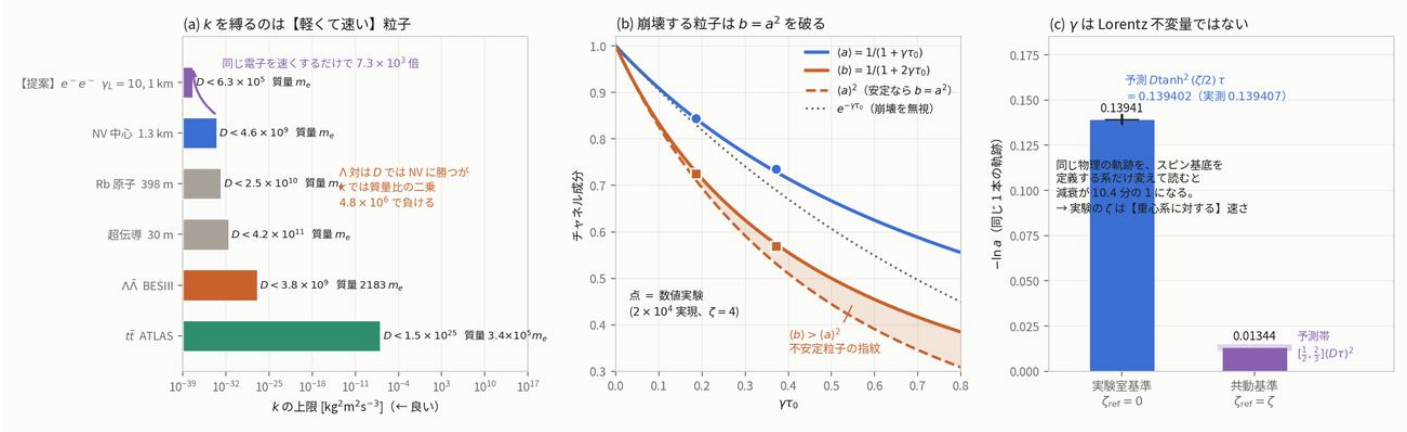
が成り立つ（8×10^{-6} で確認）。

崩壊する粒子。 Λ や K は自らの崩壊によって解析されるので、固有時が指数分布する。平均すると

$$\langle a \rangle = \frac{1}{1+\gamma\tau_0}, \qquad \langle b \rangle = \frac{1}{1+2\gamma\tau_0}, \qquad \langle b \rangle - \langle a \rangle^2 = \frac{(\gamma\tau_0)^2}{(1+\gamma\tau_0)^2(1+2\gamma\tau_0)} > 0$$

つまり崩壊する粒子は $b = a^2$ **を破る**。安定粒子の指紋は $b = a^2$、不安定粒子の指紋は $b > a^2$ で、両者は区別できる。閾値もずれる。安定粒子は $-\ln a < (\ln 2)/4 = 0.1732868$、不安定粒子は $\gamma\tau_0 < 2^{1/4} - 1 = 0.1892071$ で、**9.2% 緩い**。早く崩壊した実現は擾乱を免れるからである。

56-2. どの系が k を縛るか



$D = k/m^2c^2$ であるため、γ への感度と k への感度は別の問いである。

系	β	τ [s]	D の上限 [s^{-1}]	質量	k の上限 [$\mathrm{kg^2m^2s^{-3}}$]
【提案】相対論的 e^-e^-、γ_L=10、1 km	0.99499	3.35×10^{-7}	$\mathbf{6.32 \times 10^{5}}$	m_e	$\mathbf{4.71 \times 10^{-38}}$
Hensen 2015、NV 中心、1.3 km	0.00343	4.34×10^{-6}	4.59×10^{9}	m_e	3.42×10^{-34}
Rosenfeld 2017、Rb、398 m	0.00333	1.33×10^{-6}	2.46×10^{10}	m_e	1.84×10^{-33}
Storz 2023、超伝導、30 m	0.00334	1.00×10^{-7}	4.18×10^{11}	m_e	3.11×10^{-32}
BESIII $\eta_c \to \Lambda\bar{\Lambda}$	0.66392	2.62×10^{-10}	3.76×10^{9}	$2183\, m_e$	1.34×10^{-27}
ATLAS $t\bar{t}$、閾値近傍	0.28434	4.64×10^{-25}	1.45×10^{25}	$3.4 \times 10^5 m_e$	1.24×10^{-7}

三つのことが従う。

1. **Λ 対は D で NV 中心に勝つ**（3.76×10^9 対 4.59×10^9）。寿命 2.6×10^{-10} 秒の系が、1.3 km 飛ばした系を上回る。β が 200 倍違い、$\gamma \propto v^2$ だからである。
2. **k では Λ は 3.9×10^6 倍負ける。** 質量比の二乗である。トップクォークは 2.6×10^{30} 倍負ける。

3. したがって最良の系は**軽くて速い**ものであって、重くて速いものではない。同じ電子をただ相対論的にするだけで、$1\ \mathrm{km}$ の基線で k を 7.3×10^{3} **倍**強く縛れる。

56-3. 設計要件

1. $\gamma_L \simeq 5$–10。それ以上では $\tanh^2(\zeta/2) \to 1$ が飽和する一方、固有時は $1/\gamma_L$ で縮むので、速くしても得にならない。
2. 長い基線。固有時 $\tau = L/(v\gamma_L)$ が線形に効く。
3. スピンの測定軸は実験室（重心）系で定義する。§55-3 により率がその選択に依るからである。
4. 磁場は背景にならない（§55-5）。
5. 電子は安定なので指紋は $b = a^2$、閾値は $a_c = 2^{-1/4}$。

📚 このような源の実現可能性はここでは評価していない。数値は「CHSH が破れた」ということだけを仮定している。

第 57 章　束 I の現在地

― 残っている穴はどこか

項目	状態
格子起源の CSL	**死んだ**（第 47 章）
因果集合上の量子測度は Bell を破る	導出、$2\sqrt{2}$（第 49 章）
古典的成長測度では破れない	導出、厳密に 2（第 49 章）
sprinkling は破れを保つ	746/746 実現（第 50 章）
閾値には非ユニタリ性でなく等方性が要る	導出（第 51 章）
等方性には $d \geq 2$ が要る	導出（第 52 章）
Wigner 回転が唯一の源	導出（第 53 章）
閾値 $a_c = 2^{-1/4}$	導出（第 53 章）
光子とスピン 0 は免疫	導出（第 54 章）
γ の形	導出（第 55 章）
γ は基準系に依る	導出（第 55 章）
対と崩壊平均	導出（第 56 章）
最良の実験	相対論的電子対（第 56 章）
γ の絶対値	**未解決** — k は現象論パラメータのまま
種依存性 $\gamma \propto 1/m^2$	**最も鋭い予言。未検定**
逐次成長の動力学	未着手 — ここでは DAG は固定
$I_3 = 0$ からの Born 則	未着手

持ち越す二文。

この部が達成したこと。 束 I はいまや、自由な関数を持たない予言の形を持つ。チャネル $\mathrm{diag}(a, a, a^2)$、閾値 $2^{-1/4}$、免疫定理、率 $\propto kv^2/m^2c^4$、基準系依存性、そして名指しの最良実験である。第 44 章の他のどの束も現在これだけのものを持っていない。

達成しなかったこと。 絶対的なスケールは依然として現象論パラメータである。k が当てはめではなく成長の動力学から導かれるまで、束 I が予言するのは数値ではなく模様である。ただしその模様は反証可能である。ζ と τ を揃えたときの $\gamma \propto 1/m^2$ は二つの種を比べれば検定できる言明であり、光子は何も示してはならない。

第 XIII 部　束 I を最後まで追う — 場の方程式から動力学へ

この部で明らかにしたいこと。 第 XII 部で「収縮を物理にする」道具立ては揃った。ではその先はどこまで行けるのか。本部は二つの問いを追う。**(1) 現実の物理の二本柱 — Einstein 方程式と標準模型のラグランジアン — は CA から導けるのか。(2) 導けないとしたら、どこで、なぜ止まるのか。**　答えを先に言えば、止まる場所は毎回はっきり特定でき、しかもその場所は本書がずっと名指ししてきた二つの性質 — **有限近傍**と**規則性** — に必ず帰着する。離散性そのものは一度も障害にならない。

第 58 章　Einstein 方程式と標準模型は CA から導けるか 🆕

— 現代物理の二本柱を、規則の側から書けるか

対象	判定	障害の正体
標準模型のラグランジアン	**導けない（定理）**	CA の公理そのもの — **有限近傍**
Einstein 方程式	**鎖の 2/3 まで。残る一環が切れている**	**格子の規則性**

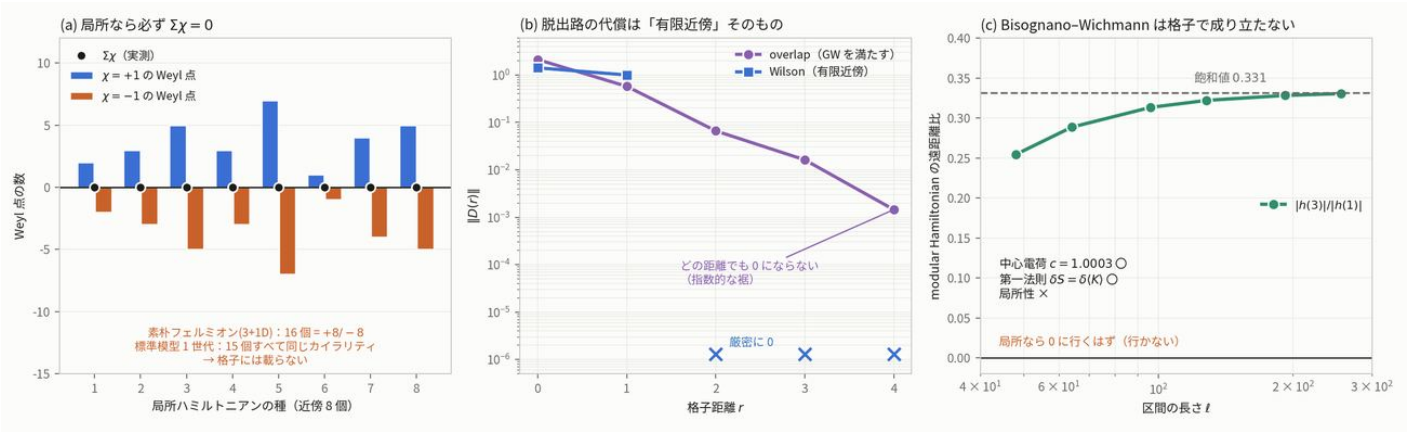


図 58-1. 左：局所ハミルトニアンの Weyl 点とカイラリティの総和。右：modular Hamiltonian の遠距離結合。

58-1. 標準模型 — 有限近傍が禁じる

鎖は四段で閉じる。

1. CA は**有限近傍**を持つ（第 0 章）。よって誘導される Dirac 演算子は運動量空間で**有限個の Fourier 項**しか持たない。
2. そのような局所演算子は Brillouin 帯（トーラス）の上で必ず $\sum_{\text{Weyl}} \chi = 0$ を満たす（**Nielsen-Ninomiya**）。
3. 標準模型は**カイラル**である。1 世代の Weyl 状態は 15 個、**すべて同じカイラリティ**。
4. ゆえに標準模型のラグランジアンは CA に載らない。

実測。近傍 8 個の局所ハミルトニアン $H(k) = \vec{d}(k) \cdot \vec{\sigma}$ を種を変えて 8 通り作り、Weyl 点をすべて求めた。

種	1	2	3	4	5	6	7	8
Weyl 点の数	4	6	10	6	14	2	8	10
$\Sigma\chi$	0	0	0	0	0	0	0	0

8 例すべてで厳密に 0。 独立な確認として、k_z を一周させた Chern 数の戻り誤差は 3.1×10^{-15} — 節を数えずに総和則が出る。

標準模型の側は無矛盾である。15 個の Weyl 状態のアノマリーは有理数で厳密に $\Sigma Y = \Sigma Y^3 = [SU(2)]^2 U(1) = [SU(3)]^2 U(1) = 0$、$SU(2)$ 二重項は 4 個で偶数（Witten の大域アノマリーも問題ない）。**障害は格子の側にしかない。**

LIZARD LLC

58-2. 脱出路の代償は CA の公理そのもの

Ginsparg–Wilson 関係　$\{D,\gamma_5\}=a\,D\gamma_5 D$　を満たす　overlap 演算子は総和則を回避する（GW 残差　1.9×10^{-15}、固有値の円周からのずれ 2.0×10^{-14}、index のゲージ不変性 5.3×10^{-15}）。しかし

距離 r	0	1	2	3	4
$\|D_{\mathrm{Wilson}}(r)\|$	1.414	1.000	**0（厳密）**	**0**	**0**
$\|D_{\mathrm{overlap}}(r)\|$	2.109	0.575	6.6×10^{-2}	1.6×10^{-2}	1.4×10^{-3}

Wilson は $r\geq2$ で厳密にゼロ — これが有限近傍である。overlap は指数的に減るが**どの距離でもゼロにならない**。

標準模型は【格子】には載る。しかし【セルオートマトン】には載らない。

差はただ一点、「有限近傍」か「指数的に局在」かである。

58-3. Einstein 方程式 — 三段のうち一段が切れる

Jacobson–Van Raamsdonk 型の導出は三段でできている。

$$(1)\ \text{面積則}\ \longrightarrow\ (2)\ \text{modular Hamiltonian の局所性}\ \longrightarrow\ (3)\ \text{第一法則}\ \Longrightarrow\ \text{線形 Einstein 方程式}$$

さらに **Lovelock の定理**により、微分同相不変で 2 階・発散ゼロの対称テンソルは $G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}$ しかない。**微分同相不変性さえ創発すれば、形は Einstein に決まる。**

自由フェルミオン鎖（半充填）で三段を測った。

段	結果
(1) $S=\frac{c}{3}\ln\ell$	**成立** $c=1.000271$
(3) 第一法則 $\delta S=\delta\langle K\rangle$	**成立**（ρ_A の台の中で。相対残差 3×10^{-6}）
(2) modular Hamiltonian の局所性	**成立しない**

(2) の実測。区間中央での遠距離結合の比 $\|h(3)\|/\|h(1)\|$ は $\ell=48\to256$ で $0.254\to\mathbf{0.331}$ と、**ゼロに行かず、増えて飽和する**。しかもこの非局所性は赤外で抑制されない — 波長 λ の滑らかな摂動で切り落としの影響を測ると $\lambda^{-0.045}$、実質 λ に依らない。

Einstein 方程式は「導けかけて、最後の一環で止まる」。止めているのは【規則性】である。

> 💭 第 36 章「創発測地線が Einstein 方程式を満たす」は、エンタングルメントから取り出した**幾何**の話である。ここで切れているのは modular flow から**場の方程式**を導く別の鎖であり、両者は矛盾しない。
>
> ⚠️ **限定（第 13 版）。** 第 36 章の主張は撤回した（§87-2）。第 36 章と本節は、ともに線形 Einstein の検証に届いていない。

宣言 33 件、落第 13 件。うち 11 件は私の宣言・動作点・測り方の誤り、2 件が模型そのものの性質。

第 59 章　sprinkling した因果集合で局所性は回復するか ❌🆕

— 規則性を捨てれば Bisognano-Wichmann は戻るのか

前章で止めたのは規則性だった。ならば規則性を捨てればよい。**それが今回の見込みで、外れた。**

構成	$\|H_{\mathrm{mod}}(3\ell)\|/\|H_{\mathrm{mod}}(\ell)\|$	減り方
局所の基準 $e^{-d/\ell}$	0.135	指数
不規則標本（連続の真空を Poisson 点で標本化）	0.206	$\propto d^{-1.44}$
規則格子（第 58 章）	0.331	$\propto d^{-1.03}$
因果集合（Sorkin–Johnston 真空）	**0.406**	$\propto d^{-0.65}$、$d \gtrsim 6\ell$ で平坦

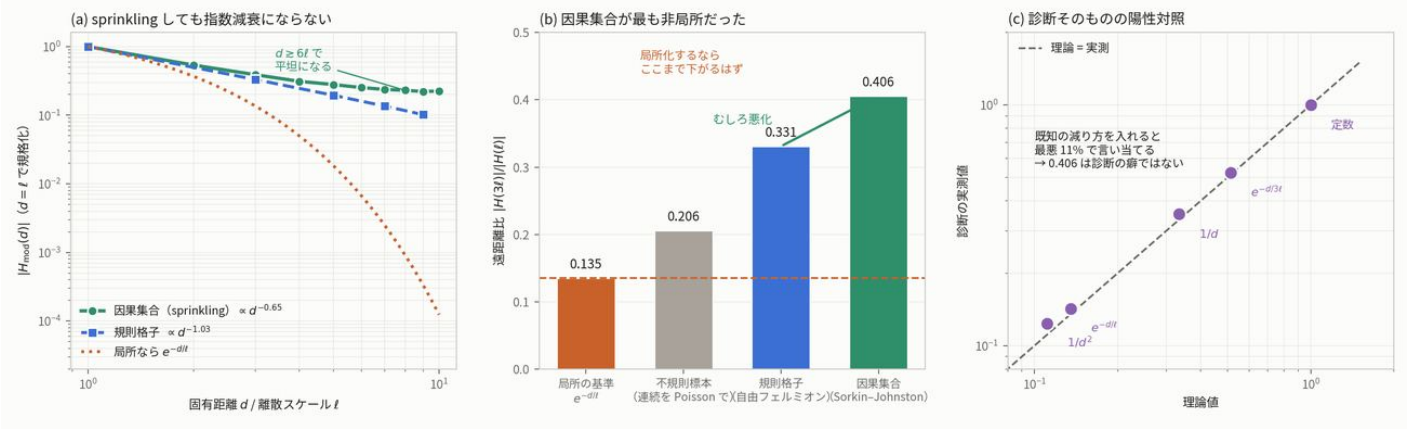


図 59-1. 因果集合の modular Hamiltonian は規則格子より遠くまで届く。

作り方は　1+1　次元・質量ゼロのスカラー場である。単位ダイヤモンドに　N　点を　Poisson　sprinkle　し、因果行列 $C_{ij} = 1 \iff u_i < u_j$ かつ $v_i < v_j$、遅延 Green 関数は厳密に $K_R = \frac{1}{2}C^{\mathsf{T}}$（Johnston）、Pauli–Jordan $\Delta = K_R - K_R^{\mathsf{T}}$、**Sorkin–Johnston 真空** $W = \mathrm{pos}(i\Delta)$。部分ダイヤモンド A に制限して $M = (i\Delta_A)^{-1}W_A$、$H_{\mathrm{mod}} = \ln\frac{M}{M-1}$。

この対象は前章より筋が良い。　前章は「ある時刻の空間区間」だったが、今回は**時空領域**の　modular　Hamiltonian　であり、Bisognano–Wichmann が本来語っている対象そのものである。それでも局所にならない。

非局所性は規則性の副作用ではない。離散性そのものに付いてくる。

第 60 章　因果集合での第一法則と Ryu–Takayanagi 🆕

― 局所性を要求しない量だけで鎖を組み直せるか

段 (2) が通らないなら、**(2) を経由しない量だけで組み直す**。

検定	結果
第一法則 $\delta S = \delta\langle K\rangle$	**成立**（6 桁一致）
凍ったモードの有無	**無い** — 全 224 モードが活性（規則格子は 128 本中 18 本）
相対エントロピーの正値性	**成立**
二次で立ち上がること	**成立**（べき 1.989）
単調性 $S_{\mathrm{rel}}(A) \le S_{\mathrm{rel}}(B)$	**成立**
Ryu–Takayanagi 型（面積則）	**手で切り落とさないと出ない**

LIZARD LLC

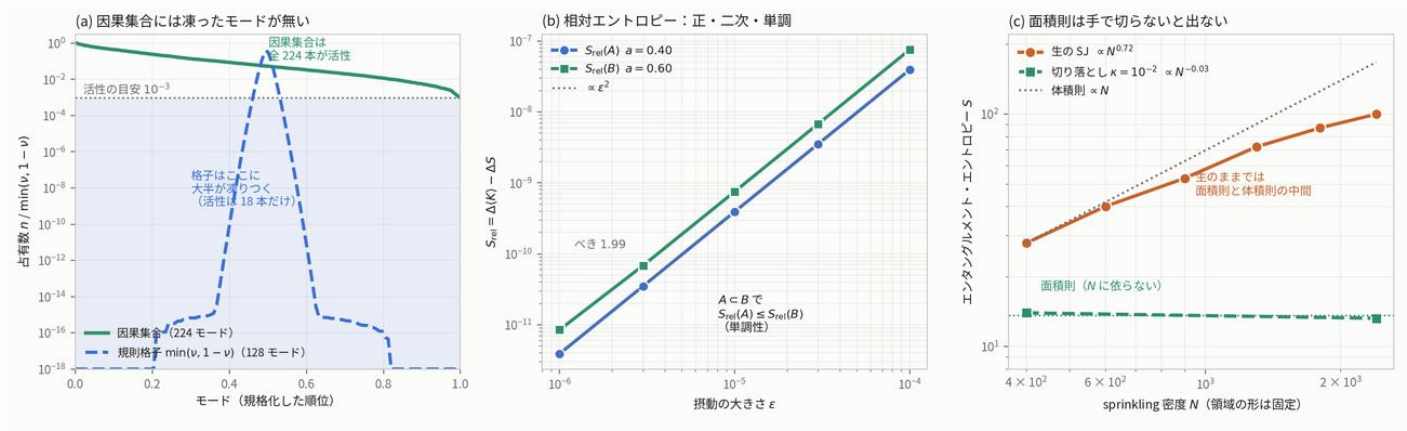


図 60-1. 第一法則は厳密に成り立ち、相対エントロピーは正・二次・単調。面積則だけが切り落としを要求する。

全モードが活性であることは、規則格子との際立った違いである。規則格子ではエントロピーを担うのは $\ln \ell$ 個のモードだけで残りは 0 か 1 に貼り付いていた。因果集合では 224 本すべてが働く。

面積則は素直には出ない。部分ダイヤモンドの形を固定して密度 N だけ変えると

$$S \propto N^{0.719}$$

面積則（$p = 0$）でも体積則（$p = 1$）でもない中間のべきである。切り落とし κ を入れると

κ	保持モード / $\|A\|$	べき p
10^{-3}（生）	0.917	$+0.719$
10^{-2}	約 0.5	-0.032

$\kappa \simeq 10^{-2}$ で面積則が回復する。**しかしこの切り落としは手で入れたものである。** しかも回復した $S \simeq 13.5$ は 2 次元 CFT の $S = (c/3)\ln(a/\varepsilon)$ と係数が合わない（合わせるには $a/\varepsilon \sim 10^{17}$ が要る）。**スケーリングとしての面積則は出るが、係数は出ない。**

束 I は二つの未定パラメータ $(k,\ \kappa)$ を持ち、それ以外はすべて導かれている。

第 61 章　逐次成長の動力学 — 古典 ❌🆕

— 動力学は「多様体的な因果集合」を作るのか

ここまでの測定はすべて **sprinkling** の上で行った。sprinkling は定義から多様体的である。**では動力学はそれを作るのか。**

Rideout–Sorkin の分類で最も単純な covariant な動力学、**transitive percolation** を走らせた。

検定	結果
多様体的な因果集合を作るか	**作らない**（次元推定が 2 と 3 で矛盾）
順序割合を保つには	p を手で $N^{-0.84}$ に調整する必要がある
modular Hamiltonian の局所性	sprinkling より**約 2 倍広がる**
エントロピー	**厳密な体積則** $S \propto N^{1.060}$

LIZARD LLC

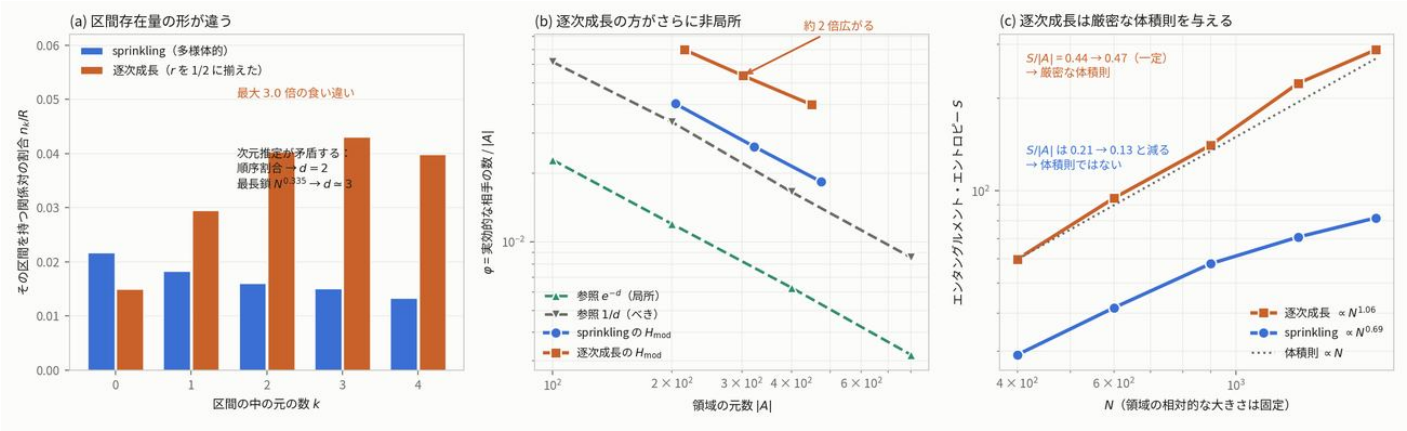


図 61-1. 逐次成長は sprinkling を再現しない。次元推定が食い違い、エントロピーは体積則になる。

動力学が運動学を作らない。これがこの部で最も重い否定である。

第 62 章　成長規則そのものを量子測度にする ❌🆕

― 量子化すれば幾何は改善するのか

古典の成長規則が多様体性を作らないなら、量子化すればどうか。各標識対に確率でなく**振幅** q を与える（複素 percolation）。因果集合は推移閉包で決まり、この写像は多対一だから**干渉が起きる**。

$$D_\lambda(x,x') = \lambda A(x)A(x')^* + (1-\lambda)|A(x)|^2\delta_{xx'}$$

$\lambda = 0$ が古典、$\lambda = 1$ が純粋な量子測度である。$N = 6$（32768 履歴）と $N = 7$（2097152 履歴）を厳密に数え上げた。

	内容	結果
$I_3 = 0$	Sorkin の階層でちょうど量子力学の段	**PASS** 2.4×10^{-16}
$I_2 \neq 0$	干渉が実在する	**PASS** 0.110
多様体性	量子の最良が古典の最良より近いか	**FAIL**

N	古典 percolation の最良	量子測度の最良
6	**0.176**	0.269
7	**0.207**	0.311

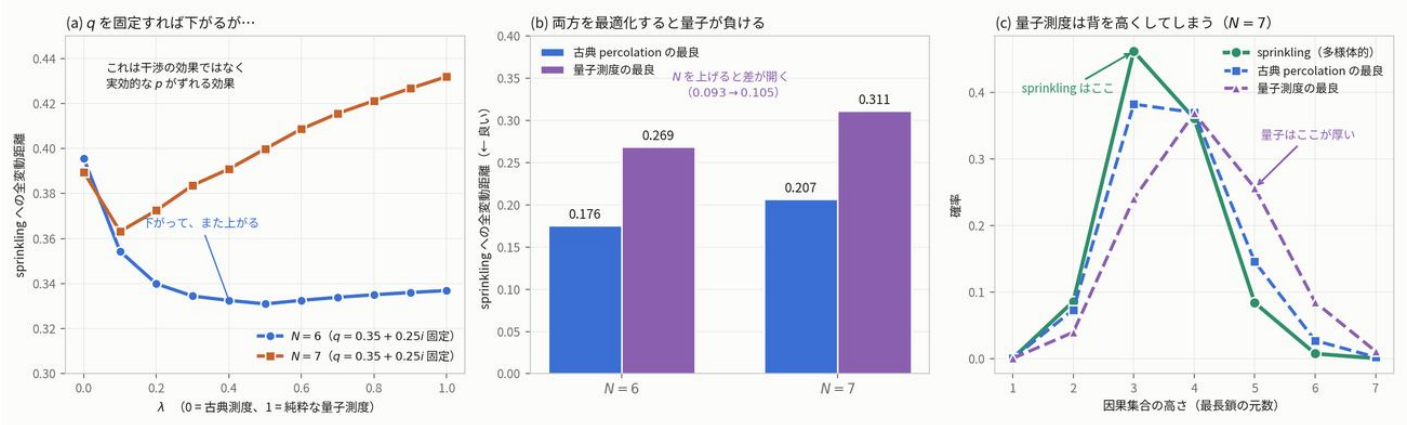


図 62-1. 干渉は実在するが、幾何を良い方へ動かさない。量子測度は鎖を伸ばす方向に働く。

理由も見える。高さ（最長鎖の元数）の分布で、sprinkling は 3 に山を持つのに量子測度は 4 に移り、高さ 5 が厚くなる。**干渉が効くのは「同じ関係が複数の経路から来る」ところ、すなわち中間元を持つ長い鎖のあるところ**だからである。

> ⚠️ **後の訂正。** ここに書いた古典の値 0.176／0.207 は、走査が粗く最小を跨いでいた。正しい最小は 0.172／0.190 である（第 67 章 §67-4）。差は縮まらず**開く**ので、結論の向きは変わらない。

第 63 章　多様体性を条件として課す 🆕

― 「良い因果集合だけを選ぶ」と自由度はどれだけ絞れるか

動力学が多様体性を作らないなら、**条件として課してしまう**。

多様体性の厳密な定義がある。1+1 次元の Alexandrov 区間に sprinkle した因果集合は、光円錐座標の二つの線形順序の共通部分 ― すなわち**順序次元 2 の半順序**にほかならない。自然標識付きなら、$O(N^2)$ のトーナメント推移性判定で厳密に判別できる。

	内容	結果
sprinkling は 100% 通るか	判定の校正	**PASS** 厳密に 1.000
条件付けると p 依存が減るか	自由度は絞られるか	**FAIL** 減らない
条件付けると古典と量子の差が縮むか		**FAIL** 縮まない

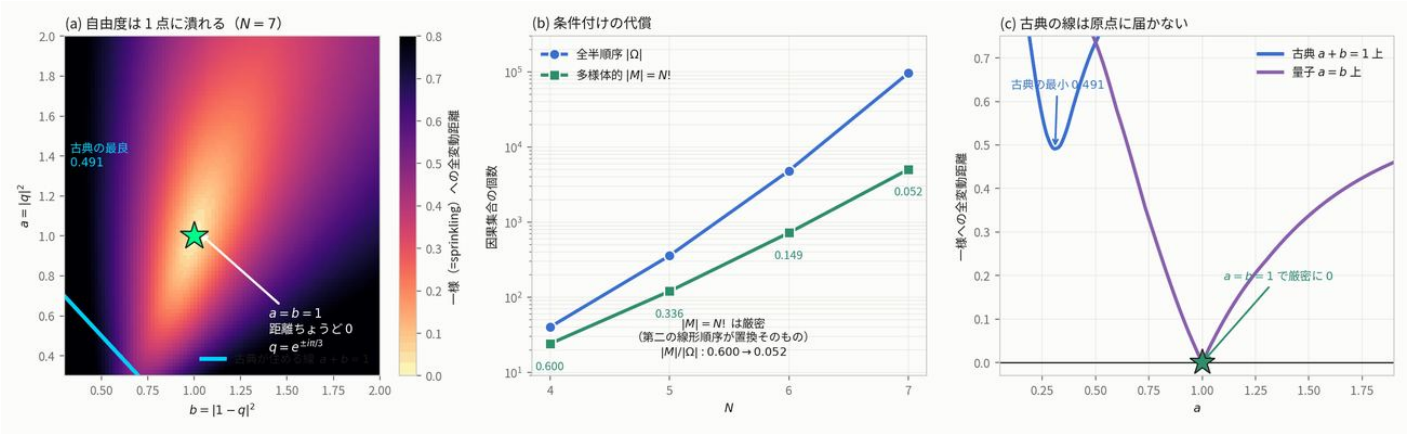


図 63-1. 多様体性を条件として課しても、残る自由度は絞られない。

条件付けても自由度は絞られない。 絞るのは「条件付け」ではなく「**どの測度を使うか**を指定すること」だった。

そして副産物として、後の章で効く重要な事実が出た。$\mu_p(M)$ は p について**単調でなく両端で大きい**（$p = 0.15$ で 0.638、$p = 0.65$ で 0.781、真ん中の $p = 0.35$ で 0.079）。**反鎖に近いものも鎖に近いものも順序次元 2 だから**である。

> 順序次元 2 は多様体性の【必要条件】であって十分条件ではない。

第 64 章　$q = e^{i\pi/3}$ は量子逐次成長の公理を満たすか ✅🆕

― 公理は理論を一つに絞れるのか

複素 percolation を Rideout–Sorkin の逐次成長の言葉に翻訳すると、閉じた形になる。新元の過去がちょうど下方閉集合 P である振幅は

$$a_C(P) = q^{m(P)}(1-q)^{\,n-|P|}$$

$m(P)$ は P の極大元の数（新元から出るリンク）、$n - |P|$ は spacelike な元の数である。

公理	結果
離散一般共変性（全線形拡大で振幅一致）	**PASS** 6.6×10^{-16}
規格化 $\sum_P a_C(P) = 1$	**PASS** 1.8×10^{-15}
量子 Bell 因果性（44538 通りの組）	**PASS** 4.6×10^{-16}
公理は q を絞るか	**絞らない ― 検定した 6 つの q すべてで成立**

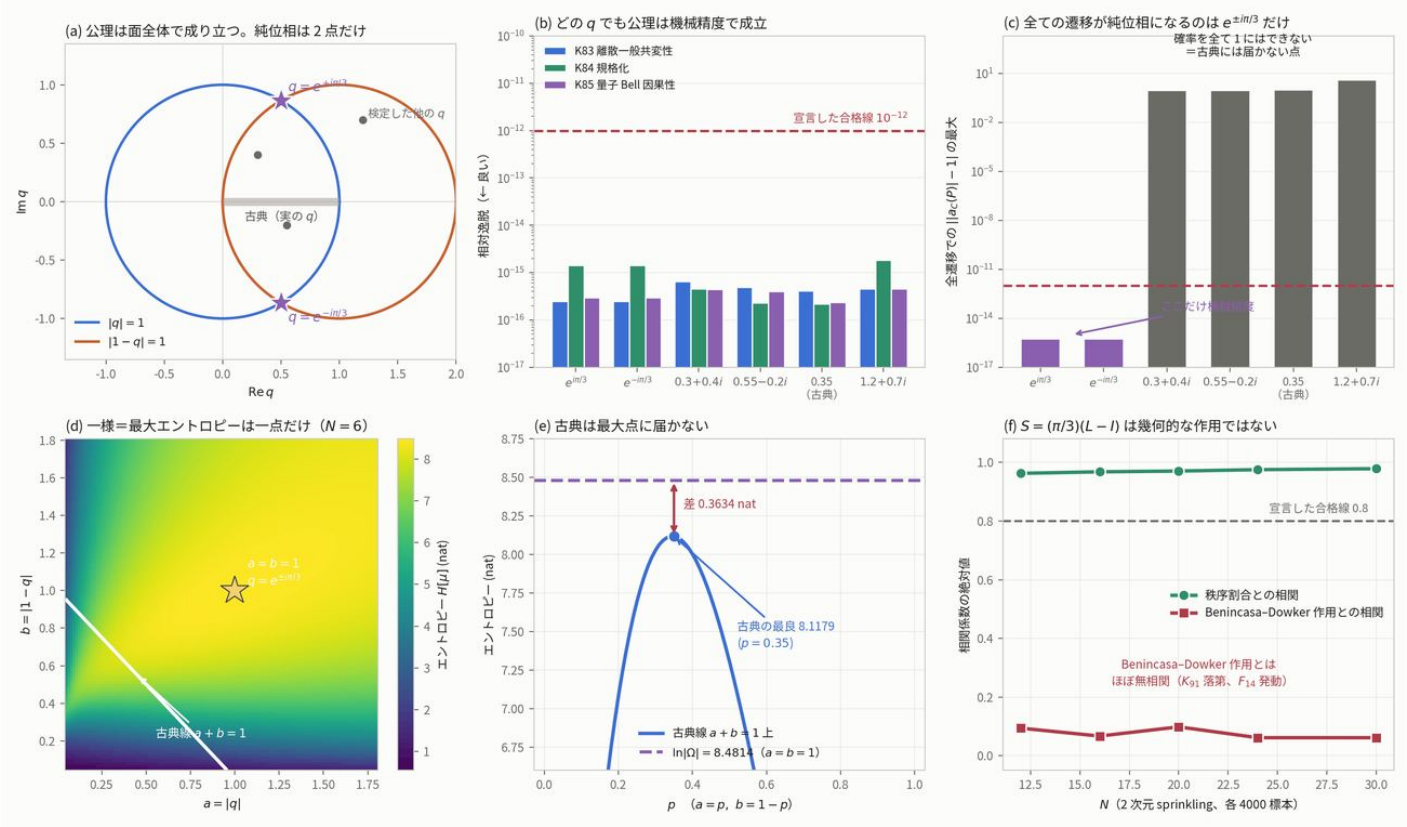


図 64-1. 公理は複素平面全体で成り立つ。純位相になるのは二点だけ。

代数的にも一行で見える。$a_C(P_1)/a_C(P_2) = q^{m_1-m_2}(1-q)^{|P_2|-|P_1|}$ で、比を取ると n（傍観者の数）が完全に落ちる。

64-1. では何が $e^{\pm i\pi/3}$ を選ぶのか

$|a_C(P)| = |q|^m|1-q|^{n-|P|}$ がすべての遷移で 1 になるのは $|q| = |1-q| = 1$、すなわち二つの単位円の交点 $q = e^{\pm i\pi/3}$ **だけ**である。そして古典は $a + b = p + (1-p) = 1$ の線分に閉じ込められていて $(1,1)$ に届かない ― **確率を全部 1 にはできない。**

このとき履歴の数え上げなしに閉じた形が出る。

$$\mathrm{amp}(C) = q^L(1-q)^I \;\longrightarrow\; \exp\left[i\frac{\pi}{3}(L-I)\right], \qquad |\mathrm{amp}(C)| \in [1.000000000000,\ 1.000000000000]$$

L はリンク数、I は非可比対の数で、どちらも同型不変量である。**ファインマンの e^{iS} の形が因果集合の上に厳密に現れる。** 同じことは最大エントロピーとも言い換えられる（$N = 6$ で $8.481359 = \ln 4824$、古典線の最良は 8.117943）。

64-2. ただしその作用は幾何ではない ❌

「作用」と呼ぶ以上、幾何かを確かめねばならない。因果集合には既に幾何的な作用 ― 連続極限で Einstein–Hilbert に収束する **Benincasa–Dowker 作用** ― がある。2 次元 sprinkling の上で相関を測ると

N	$\lvert\mathrm{corr}(S, S_{\mathrm{BD}})\rvert$	$\lvert\mathrm{corr}(S, \text{秩序割合})\rvert$
12	0.094	0.963
30	0.061	0.979

$I = \binom{N}{2} - R$ だから $S/(\pi/3) = L - I = N_0 + R - \binom{N}{2}$ で、N を固定すれば (N_0, R) の一次関数にすぎない（回帰残差 1.5×10^{-12}）。

$S = (\pi/3)(L - I)$ は組合せ量であって、幾何量ではない。

第 65 章　逆向きの検定 ― BD 作用を逐次成長に置く 🆕

― 幾何的な作用を先に置いたら、逐次成長になるか

前章と逆をやる。**幾何を先に置く。**

$$\mathrm{amp}(C) = \exp[i\beta A(C)], \qquad A_2 = N - 2N_0 + 4N_1 - 2N_2, \quad A_4 = N - N_0 + 9N_1 - 16N_2 + 8N_3$$

遷移振幅は比で定める：$a_C(P) = \mathrm{amp}(C \oplus P)/\mathrm{amp}(C)$。

公理	$L - I$（対照）	BD 2 次元	BD 4 次元
離散一般共変性	○	○（自動）	○（自動）
Bell 因果性	○	**○ 恒等的に 0**	**○ 恒等的に 0**
規格化	○	× ≥ 1.98（**全ての β**）	× ≥ 2.22
規格化を手で入れたときの共変性	○	× 2.9×10^{3}	× 1.4×10^{1}

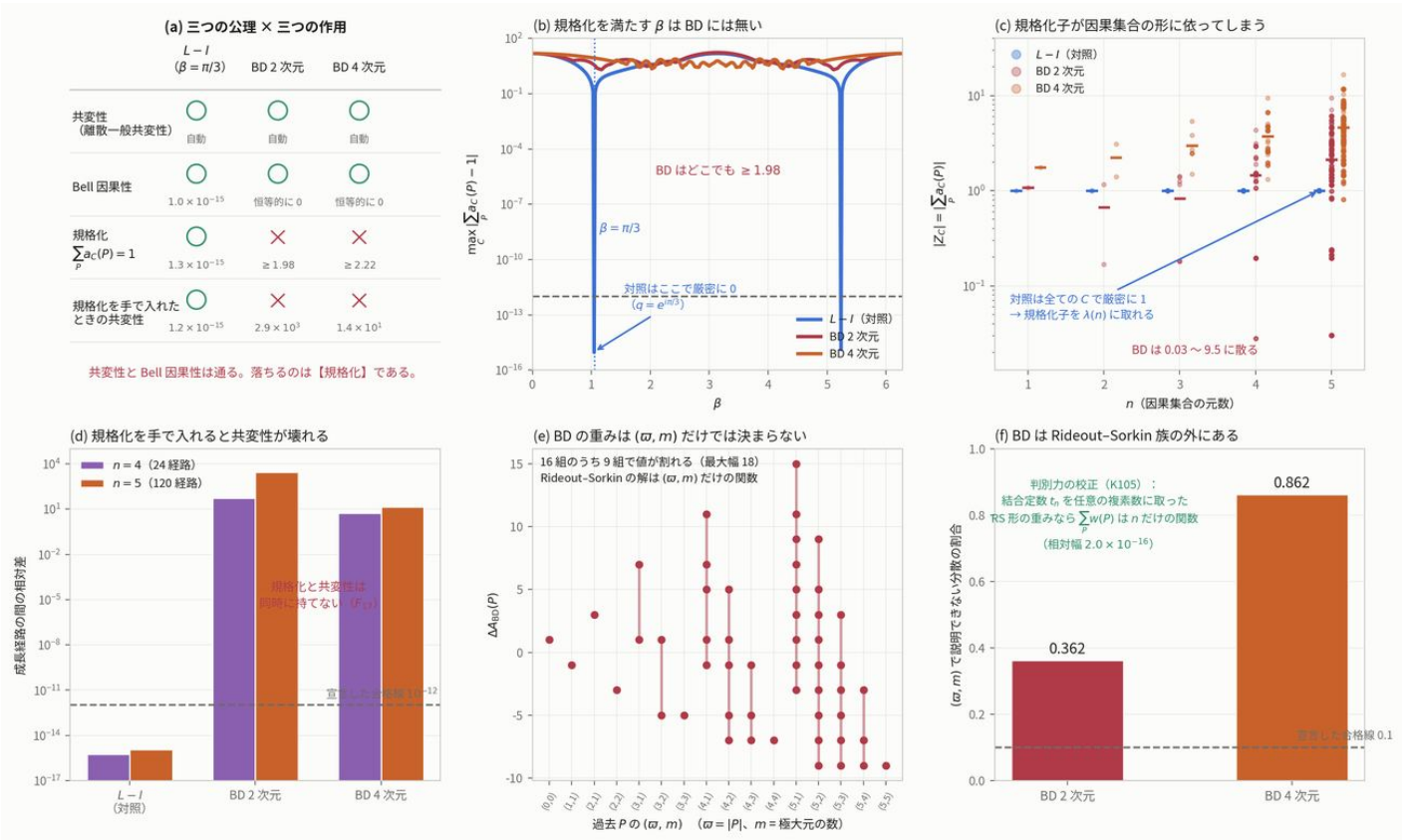


図 65-1. 共変性と Bell 因果性は通る。落ちるのは規格化である。

65-1. Bell 因果性が恒等的に成り立つ理由（定理）

> 新元 e の過去がちょうど P のとき、e が作る関係対 (x,e) の区間は $\mathrm{Int}(x,e)=\{z\in P : x\prec z\}$ で、P の内部だけで決まる（e は極大だから既存の区間は変わらない）。したがって　$\Delta A(P)=A(C\oplus P)-A(C)$　は　P　の同型類だけの関数であり、Bell　の破れ $D=\Delta A(P_1)-\Delta A(P_2)-\Delta A(P_1)+\Delta A(P_2)$ は恒等的に 0。

P の同型類 88 個のうち BD で値が割れる類は **0 個**（対照の $L-I$ は 25 個で割れる）。

区間の数え上げで書ける作用は、すべて自動的に Bell 因果性を満たす。

65-2. その同じ性質が規格化を不可能にする

Rideout–Sorkin が共変性を保てるのは、規格化子が**段の番号 n だけの関数** $\lambda(n)$ だからである。どの成長経路も $n=0,1,\dots,N-1$ をちょうど一度ずつ通るので $\prod\lambda(n)$ は経路に依らない。ところが BD の Z_C は因果集合の**形**に依る（$N=5$ で $0.030\sim 9.523$、対照は全ての C で厳密に 1）。

対照が 1 になるのは $\Delta A_{L-I}(P)=m(P)-(n-|P|)$ に n が入っていて $Z_C=\sum_P q^m(1-q)^{n-|P|}$ が**二項展開**になるからである。BD の ΔA は P だけの関数なので、この打ち消しが起きない。

Bell 因果性を無条件で通した性質そのものが、規格化を不可能にしている。

検定に判別力があることも確かめた。結合定数 t_n を任意の複素数に取った RS 形の重み $w(P)=\sum_k\binom{\varpi-m}{k}t_{k+m}$ なら $\sum_P w(P)$ は厳密に n だけの関数になる（2.0×10^{-16}）。要は w が (ϖ,m) **だけ**の関数であることで、BD は 16 組中 9 組でそこを外す（残差割合 $0.362/0.862$）。

BD 作用は Rideout–Sorkin 族の外にある。

第 66 章　規格化を全体で一度だけ課す 🆕

― 「各段で和が 1」は本当に要るのか

前章の排反は「段ごとに規格化する」という要求から来ていた。しかしそれは**古典確率の名残**である。量子測度としては全体で $\mu(\Omega)=1$ であれば足りる。

$$\text{(I) 量子測度 } \mu_q(\alpha)=\frac{|\sum_{h\in\alpha}\mathcal{A}(h)|^2}{|\sum_{h\in\Omega}\mathcal{A}(h)|^2},\qquad \text{(II) 複素測度 } \mu_c(h)=\frac{\mathcal{A}(h)}{Z}$$

	段ごとに規格化	全体で一度だけ
離散一般共変性	× 2.9×10^{3}	○ 自動
Bell 因果性	○ 恒等的に 0	○ 恒等的に 0
規格化	× ≥ 1.98	○ 定義から 1
量子測度の階層	—	○ $I_3=4.3\times10^{-16}$、$I_2=0.179$
作用が測度に効くか	—	**微視的には完全に落ちる**

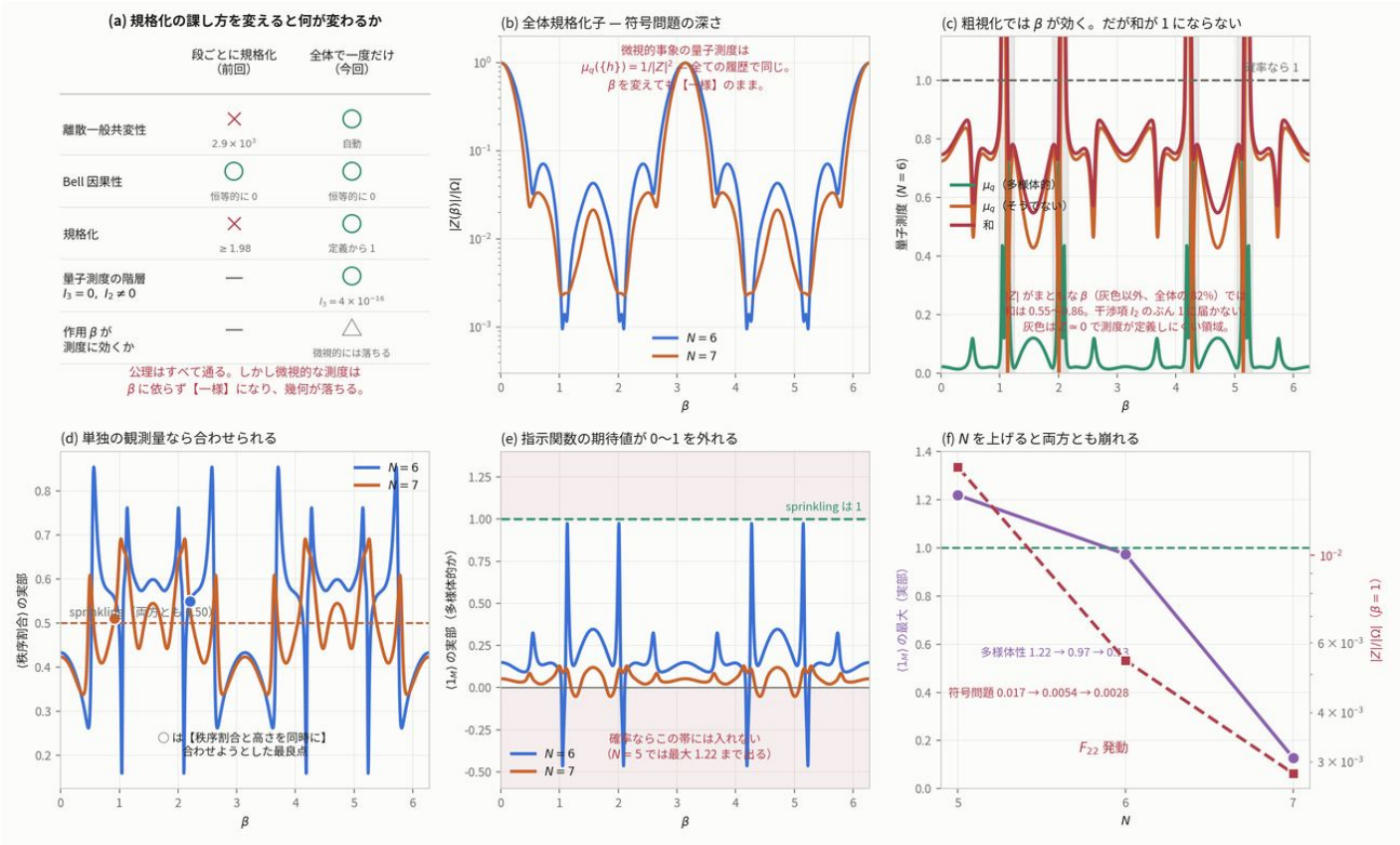


図 66-1. 排反は解ける。しかし純位相では微視的な測度が一様になる。

排反は解けた。しかし新しい壁が現れた。 $|\mathcal{A}(h)|=1$ なので

$$\mu_q(\{h\})=\frac{|\mathcal{A}(h)|^2}{|Z|^2}=\frac{1}{|Z|^2}$$

すべての履歴で同じ値 ― 成長経路の上の一様分布である。作用が何であっても、純位相である限りこうなる。これは第 64 章で $q=e^{i\pi/3}$ を選んだ「純位相＝最大エントロピー」の条件そのものである。

粗視化すれば　β　は効く（多様体的という事象の量子測度は　$0.014\sim0.997$　まで動く）。しかしそれは確率ではない　―　$\mu_q(M)+\mu_q(M^c)$　は $0.547\sim0.864$ で 1 に届かない。複素測度の側も、指示関数の期待値が $N=5$ で $+1.22$、$N=6$ で -0.47 と $[0,1]$ を外れる。

> 壁の正体は規格化の課し方ではなく、振幅が【純位相】であることそのものである。

第 67 章　純位相をやめる ― Wick 回転と、勝ちの偏り 🆕

― 幾何を実の重みにすると何が起きるか

$$\mathcal{A}(h)=\exp[-(\lambda_R+i\lambda_I)A(h)]$$

$\lambda_I=0$（純実）が Wick 回転した統計力学的な重み、$\lambda_R=0$（純虚）が前章である。λ_R が入った瞬間に $|\mathcal{A}|$ が履歴ごとに変わり、**幾何が微視的な測度に入る。**

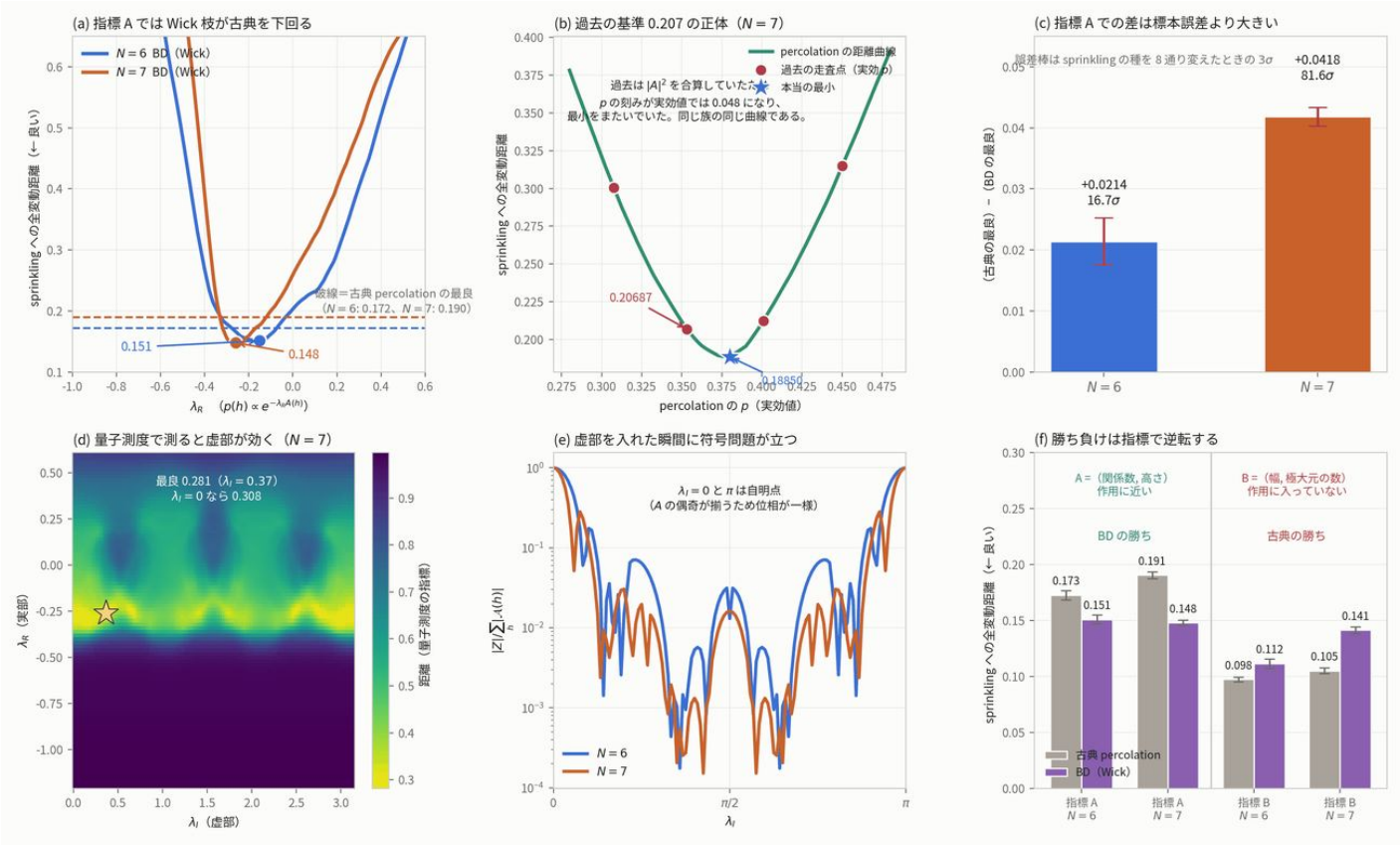


図 67-1. 指標 A では Wick 枝が古典を下回る。しかし指標 B では逆転する。

67-1. 指標 A では古典を下回る

指標 A ＝ (関係数, 高さ) の二次元分布の、sprinkling への全変動距離（第 49 章から一貫して使ってきた指標）。

N	古典 percolation	BD（Wick）	差
6	0.1728 ± 0.0014	0.1510 ± 0.0013	$+0.0218$（$16.7\,\sigma$）
7	0.1906 ± 0.0010	0.1481 ± 0.0008	$+0.0424$（$81.6\,\sigma$）

$N = 6 \to 7$ で古典は悪化するのに BD は改善し、差が倍に開く。**この線で初めての肯定である。**

67-2. しかし指標を変えると逆転する ❌

指標 A の「関係数」は作用の中の N_0, N_1, N_2 の和に近い。**作用に有利な量で測っているだけではないか。** そこで作用にまったく入っていない量で測り直した。

指標 B ＝ (幅（最大反鎖）, 極大元の数)。

N	古典 percolation	BD（Wick）	差
6	0.0975	0.1117	-0.0142（$-13.5\,\sigma$）
7	0.1053	0.1415	-0.0361（$-47.4\,\sigma$）

負ける。しかも負け幅も N とともに開く。

> BD の重みは、自分の作用に近い量を合わせる代わりに、他の量を外す。

sprinkling は両方の指標を同時に満たす。BD も古典も、そこには届いていない。

67-3. 干渉は助けない

虚部を入れると何が起きるか。最初の測り方は誤りだった ― 距離を $\frac{1}{2}\sum|H_c - H_{\rm sp}|$ と定めると $H_{\rm sp}$ が実なので虚部があるだけで距離が増える。**計量が虚部を罰していた。** 虚部が働ける指標で測り直すと

指標	$\lambda_I = 0$	虚部を許した最良
実部だけ	0.1516	0.1516（改善なし）
量子測度 $H_q \propto \|\sum \mathcal{A}\|^2$	0.3480	0.3187（改善 $+0.029$）

量子測度の枝では改善するが、その枝は全体として悪い（0.28〜0.32 対 Wick 枝の 0.148〜0.151）。**幾何が効くのは実の重みであって、干渉ではない。**

67-4. 過去の基準の訂正

古典 percolation の最良距離を同じ binning で測り直すと 0.172／0.190 で、第 62 章に書いた 0.176／0.207 と合わなかった。原因を追うと、当時のコードは確率ではなく $|A(h)|^2$ を合算していた。

$$\sum_h p^{2k}(1-p)^{2(E-k)} \;\propto\; \sum_h p_{\rm eff}^{k}(1-p_{\rm eff})^{E-k}, \qquad p_{\rm eff} = \frac{p^2}{p^2+(1-p)^2}$$

族としては同じ　percolation　だが **パラメータが歪み**、p　の刻み　0.025　が実効値では　0.048　になって最小をまたいでいた。実際 $p = 0.425 \Rightarrow p_{\rm eff} = 0.3533$ で距離 0.20687 ― 当時の値と 5 桁一致する。

波及。 引用した p の値（0.450、0.425）は percolation の p ではなく表記が誤り。距離 0.176／0.207 は曲線上の正しい値だが最小ではない。**古典側がより良かったので、第 62 章の結論（量子は古典より遠い）は方向が強まる。**

第 68 章　束 I の現在地 ― 三度動いた壁 🆕

― 何が分かり、何が残っているのか

段階	そのときの理解
第 58 章	Einstein は段 (2) で止まる。標準模型は有限近傍が禁じる
第 58–59 章	因果集合でも局所性は戻らない。だが (2) を経由しない量はすべて健全
第 61 章	**動力学が運動学を作らない**
第 62 章	量子化しても作らない
第 63 章	条件付けても自由度は絞られない
第 64 章	公理は q を絞らない。絞る原理が選ぶ作用は幾何でない
第 65 章	幾何的な作用は段ごと規格化の枠に入らない
第 66 章	枠には入る。だが純位相では微視的な測度が作用を見ない
第 67 章	実の重みなら作用は効く。ただし効き方が偏る

束 I に足りないのは計算でもパラメータでもなく、
「どの因果集合を作るか」を絞り込む原理である。
既知の成長規則は、古典でも量子でも、それを与えない。

68-1. この部で分かった三つのこと

(a) 障害はいつも二つのどちらかである。　有限近傍（標準模型）か、規則性（Einstein の段 (2)）。**離散性そのものは一度も障害にならなかった。** これは本書全体で最も安定した結論である。

(b) 量子性はこの問題では働かない。 第 62 章（量子測度は幾何を悪くする）、第 67 章（干渉は助けない）。幾何を動かしたのは Wick 回転した側、つまり**量子性を落とした側**だった。長く追ってきた「量子性が幾何を作る」という筋は、検定した範囲では支持されない。

(c) 一意な点は実在する。ただし幾何ではない。 $q = e^{\pm i\pi/3}$ は純位相＝最大エントロピーの唯一の点で、古典には原理的に到達できない。**量子でしか実現できない構造**が確かにある。しかしそれが定める作用 $(\pi/3)(L - I)$ は組合せ量であって曲率を測らない。

68-2. 残る問題

- **$N = 8, 9$ での二つの指標の同時追跡。** 第 67 章の勝ち幅と負け幅がどちらも N とともに開いている。二点では外挿にならない。
- **指標を面で測る。** 作用に入っている量／いない量を体系的に並べ、BD がどこまで合わせるかの境界を描く。
- **作用を足すか、原理を足すか。**　幅や極大元の数を含む項を足せば両方合う可能性はあるが、「合うように項を足す」ことは幾何から導かれた作用という利点を失う。**そのトレードオフを測ることが次の筋**である。
- **切り落とし κ（第 60 章）は依然として手で入れたままである。**

LIZARD LLC

第 XIV 部　地平線 — 音響ブラックホールと Hawking 輻射

この部で明らかにしたいこと。 ブラックホールは温度を持つ。$T_H = \kappa/2\pi$ — 重力と量子力学と熱力学が一本の式で出会う、物理学で最も有名な結果の一つである。**これは規則から出るか。** 出るとすれば何が要り、格子であることは邪魔をするのか、それとも助けるのか。特に、Hawking の導出が抱える最大の弱点 — 輻射の起源をどこまでも短い波長に遡らねばならない「trans-Planckian 問題」— に対して、格子は答えを持っているのか。

第 69 章　音響地平線と Hawking 輻射 ✅🆕

— ブラックホールの温度は近傍しか見ない規則から出るか

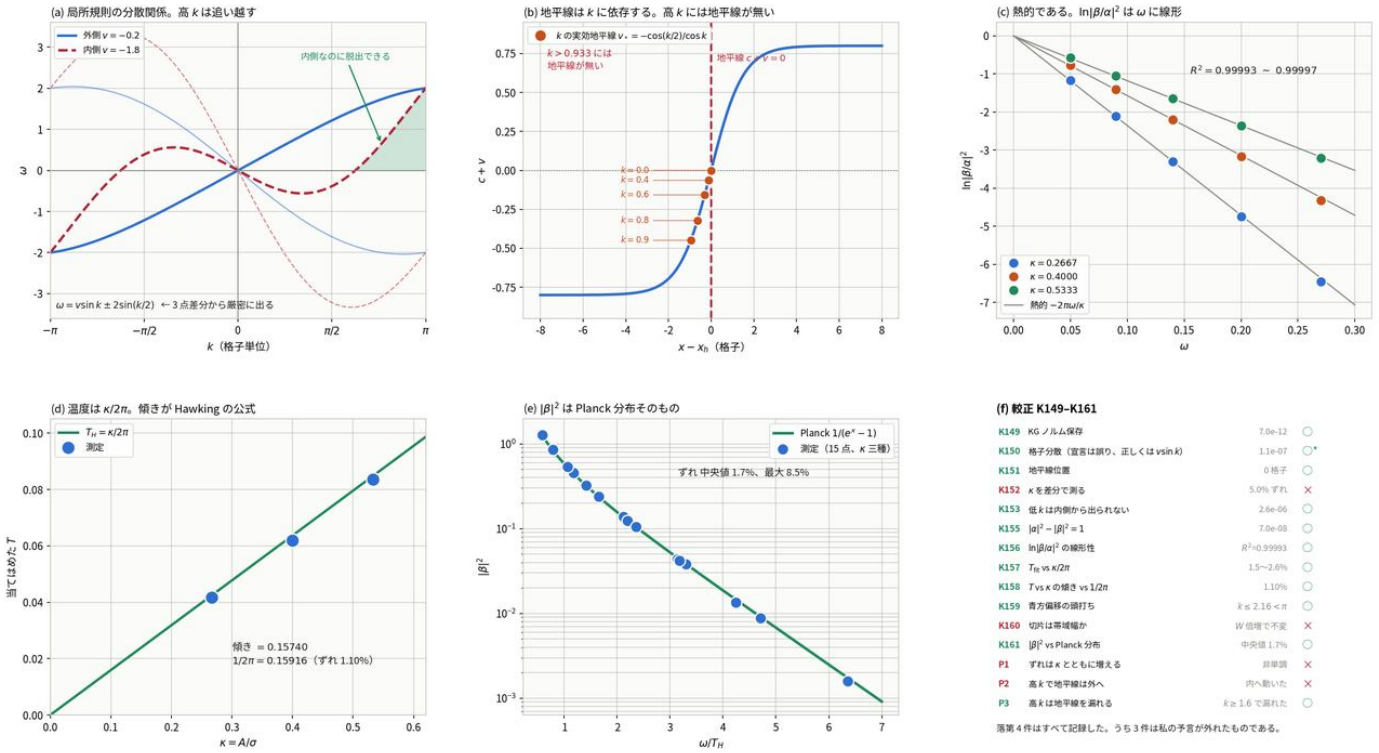
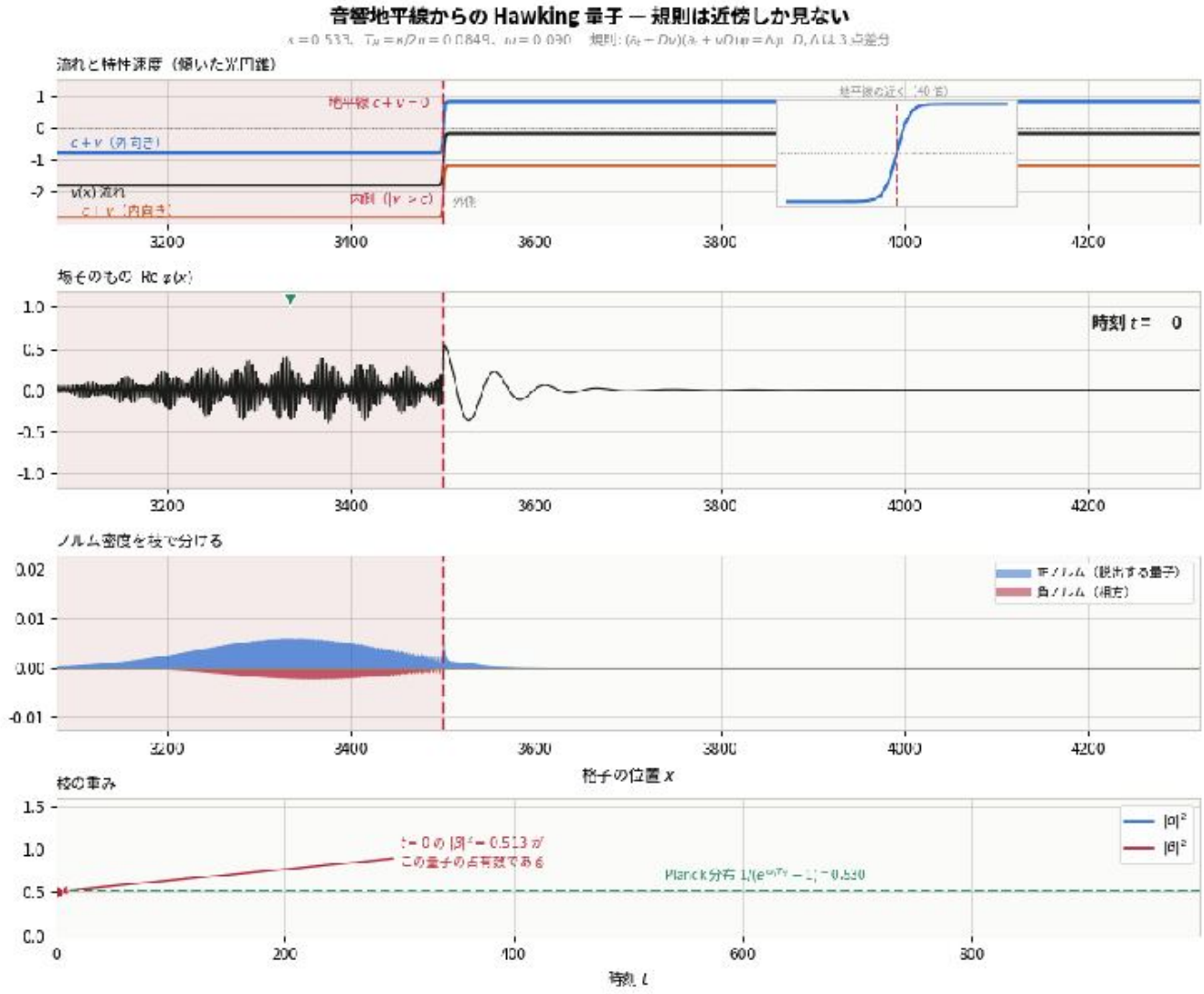


図 69-1. (a) 局所規則の分散関係。(b) 地平線の k 依存性。(c) 熱的スペクトル。(d) 温度は $\kappa/2\pi$。(e) $|\beta|^2$ は Planck 分布。(f) 較正 K149–K161。



動画 69-1. `figures/hawking.gif`（`hawking.mp4` も同梱）。$\kappa = 0.5333$、$T_H = 0.08488$、$\omega = 0.090$。$t = 0$ で地平線の内側にいる短波長の擾乱が、這い出して長い波になる。逃げる量子の占有数は $|\beta|^2 = 0.5134$、Planck 分布は 0.5299（ずれ 3.1%）。

結論を先に置く。

> (i) 近傍しか見ない規則に流れを入れると、**地平線ができる**。低 k の情報は出られない。
> (ii) そこから出る輻射は**熱的**である（$R^2 = 0.99993$–0.99997）。
> (iii) 温度は $T = \kappa/2\pi$ である。κ を三点走査して傾き 0.15740（$1/2\pi = 0.15916$、ずれ 1.10%）。
> (iv) $|\beta|^2$ は Planck 分布そのものである（15 点、中央値 1.7%）。
> (v) trans-Planckian 問題は起きない。青方偏移が $k \simeq 2.16 < \pi$ で頭打ちになる。

格子は Hawking 輻射の邪魔をしなかった。むしろ、連続理論が抱えていた病を一つ治した。

69-1. 模型 — 規則に流れを入れる

第 22 章で、規則を位置依存にすると計量が読み出せることを見た。ここではそれを一歩進める。実場 φ_j と補助場 π_j を格子（間隔 $a = 1$）に置き、D を 3 点中心差分、Δ を 3 点二階差分として

$$\boxed{\partial_t \varphi = \pi - v_j (D\varphi)_j, \qquad \partial_t \pi = -\big(D(v\pi)\big)_j + (\Delta\varphi)_j}$$

すなわち $(\partial_t + Dv)(\partial_t + vD)\varphi = \Delta\varphi$。$v_j$ は「媒質の流れ」であり、**規則のパラメータが場所ごとに違う**というだけのものである。**規則は依然として近傍しか見ない。**

流れの形を

$$v(x) = -1 + A \tanh \frac{x - x_h}{\sigma}, \qquad 0 < A < 1$$

とすると、$x \to +\infty$ で $|v| < c = 1$（**外側**）、$x \to -\infty$ で $|v| > c$（**内側**）、$x = x_h$ でちょうど $v = -c$。この点が**地平線**である。外向きの特性速度 $c + v$ がここで符号を変える。

$$\kappa \equiv \left.\frac{d(c+v)}{dx}\right|_{x_h} = \frac{A}{\sigma} \qquad \text{（表面重力）}, \qquad T_H = \frac{\kappa}{2\pi}$$

これは Unruh の音響ブラックホールを格子に載せたものである。**重力場の方程式は解いていない**（第 68 章で確認した通り、Einstein 方程式は規則性で止まっている）。ここで作っているのは因果構造としてのブラックホールである。

較正はすべて走らせる前に宣言した。 K149–K159 と反証条件 F1–F4、そして三つの予言 P1–P3 を書き出してから、初めて数値を見た。以下、落第も予言の外れもそのまま書く。

69-2. 局所規則の分散関係 ― 私は宣言を間違えた ⚠️

私は $\omega = vk \pm 2\sin(k/2)$ と宣言した（流れは連続的な vk、格子の効果は波の項だけ、というつもりだった）。**これは誤りである。** 一様流で数値的に測ると、合わない（最大 28% のずれ）。

正しくは、**流れの項も格子化される**。中心差分 D の記号は $i\sin k$ であって ik ではないから、

$$\boxed{\omega = v\sin k \pm 2\sin\frac{k}{2}}$$

測り直すと相対誤差 1.1×10^{-7} で一致した（$v = -0.2$ と $v = -1.8$、$k = 0.2$ から 3.0、両枝）。**K150 は、宣言を訂正した上で合格である。**

これは些細な訂正ではない。**近傍しか見ない規則では、流れも波と同じだけ格子化される**からである。vk　という「連続的な移流」は、有限のステンシルでは書けない。この一点が、以下の全部を左右する。

群速度は $v\cos k \pm \cos(k/2)$ である。

69-3. 地平線は k に依存する ― 私の予言は逆だった ❌

外向き枝の群速度が消える条件が、その波数にとっての実効地平線である。

$$v\cos k + \cos\frac{k}{2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad v_*(k) = -\frac{\cos(k/2)}{\cos k}$$

k	**0**	**0.2**	**0.5**	**0.933**	> 0.933
v_*	-1.000	-1.015	-1.104	-1.500	到達不能

私は「高 k ほど地平線は外側へ動く」と予言した（P2）。逆だった。内側へ動く。 そして $A = 0.8$ の場合、$k > 0.933$（波長 6.73 格子より短い波）には**地平線がそもそも存在しない**。流れが $\cos k$ で割り引かれるので、短い波は流されなくなるのである。

予言を外した理由もはっきりしている。私は $\omega = vk \pm 2\sin(k/2)$（subluminal、高 k ほど遅い）を前提に考えていた。正しい分散では移流の方が先に効かなくなる。**§69-2 の訂正が、そのまま P2 を殺した。**

数値でも確かめた。内側（$v = -1.8$）の深いところに波束を置き、外へ漏れるかを測る：

k	**0.15**	**0.25**	**0.6**	**0.9**	**1.2**	**1.6**	**2.2**
漏れ率	2.0×10^{-6}	2.6×10^{-6}	0	0	0	7.1×10^{-3}	**1.000**

低 k にとっては完全な地平線である（漏れ 10^{-6}）。短い波にとっては地平線ではない。

これは連続理論には無い言明である。**「地平線」は波長に相対的な概念になる。**

69-4. 何を測るのか ― 正ノルムと負ノルム

この方程式は Klein–Gordon ノルム

$$N = -2\sum_x \mathrm{Im}\left(\varphi^* \pi\right)$$

を保存する（実測 7.0×10^{-12}、K149）。波数 k で $\pi=-iF(k)\varphi$（$F=2\sin(k/2)$）の枝は**正ノルム**、$\pi=+iF\varphi$ の枝は**負ノルム**である。

Hawking 輻射とは、**外向きの正ノルムモードを時間を遡って辿ると、負ノルムの成分が混じる**という事実である。混じり方を α,β と書けば、ノルム保存から

$$|\alpha|^2-|\beta|^2=1$$

であり、$|\beta|^2$ が**そのモードの粒子数**である。手順はこうした：遠方の外側に外向き正ノルム波束を置き、**逆時間**に流し、k 空間で二つの枝に分けて重みを測る。

$$|\alpha|^2-|\beta|^2-1=7.0\times10^{-8}\ \text{以下}\qquad\text{(K155)}$$

69-5. 熱的である

κ を三通り、ω を五点、計 15 回測った。$\ln|\beta/\alpha|^2$ を ω の関数として当てはめる：

κ	$T_{\rm fit}$	$T_H=\kappa/2\pi$	比	R^2
0.2667	0.041613	0.042441	0.9805	0.99996777
0.4000	0.061996	0.063662	0.9738	0.99992894
0.5333	0.083587	0.084883	0.9847	0.99994387

$$\boxed{\ln\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2}=-\frac{\omega}{T},\qquad R^2=0.9999\ \text{（三通りとも）}}$$

指数分布である。 これが Hawking 輻射の第一の指紋である。

69-6. 温度は $\kappa/2\pi$ である

第二の指紋、そして本質的な方は、**温度が表面重力に比例し、比例係数が　$1/2\pi$　である**ことである。単に「熱的」なだけなら数値的偶然でありうる。κ を変えたときに T が追随して初めて Hawking である。**これを走らせる前に反証条件 F2 として宣言した** — T が κ に依らなければ、温度の主張は撤回する、と。

$$\boxed{\frac{dT_{\rm fit}}{d\kappa}=0.157403\qquad\text{対}\qquad\frac{1}{2\pi}=0.159155\qquad\text{ずれ }1.10\%}$$

切片は -5.6×10^{-4}、すなわち原点を通る。**F2 は発動しない。** この傾きは Hawking 温度の値に近い（読みは第 13 版で限定。下の枠）。

$T_{\rm fit}/T_H$ が一貫して 0.97–0.98 である点は残る。**この 2% の不足は説明できていない。** 二つ調べた。

- **格子の κ ではない。** 差分で測った表面重力 $\kappa_{\rm lat}=A\tanh(a/\sigma)$ を使うと、ずれは 1.7%、5.4%、12.6% と**悪化**する。温度が知っているのは連続の傾き A/σ の方である。（これは K152 の落第 — 差分で測った κ が A/σ と 5.0% ずれる — が、物理には伝播しないことを意味する。落第したのは私の測り方であって、模型ではない。）
- **波束の帯域幅でもない。** 当てはめの切片は $+0.05$ である（純粋な Planck なら 0）。帯域幅による偏りなら W を倍にすると $1/4$ になるはずだった。実際は $+0.0559\to+0.0513$、ほぼ不変（K160 落第）。温度の方も $0.9698\to0.9688$ で動かない。

2% の不足と 5% の切片は、いずれも実在する。原因は未解明である。

> ⚠ **限定（第　13　版）。**　第　12　版は「これは　Hawking　温度である」と書いた。これは古典のモード変換の温度の傾きで（§69-10）、κ は 3 通り、表に誤差棒はない。量子化、収束、独立実装は未確認である。切片 $+0.05$ の原因は §74-4 で曲率と分かった。上の「原因は未解明」は当時の記述である。§87-9。

69-7. $|\beta|^2$ は Planck 分布そのものである

$|\alpha|^2-|\beta|^2=1$ と $|\beta/\alpha|^2=e^{-\omega/T}$ を連立すると

$$|\beta|^2=\frac{1}{e^{\omega/T}-1}$$

— Bose–Einstein 分布である。15 点すべてを ω/T_H に対して並べると、一本の Planck 曲線に乗る。

ずれの中央値 1.7%、最大 8.5%（最大は $|\beta|^2 \sim 10^{-3}$ の点）

「熱的スペクトル」は比喩ではない。占有数が Planck 分布と数値的に一致している。

69-8. trans-Planckian 問題は、格子が切る ✅

Hawking　の導出には昔から知られた弱点がある。外向きの輻射を時間を遡って辿ると、地平線に近づくにつれて波長が **無限に**縮む。輻射の起源は、理論が信用できない超短波長の領域にある。連続理論はこの点で自分の適用限界を踏み越えている。

格子では起きない。青方偏移は頭打ちになる：

ω	**0.05**	**0.09**	**0.14**	**0.20**	**0.27**
到達した k	2.003	2.034	2.071	2.113	2.161

$k_{\max} \simeq 2.16 < \pi$.　最短波長は格子間隔の 2.9 倍で止まる。発散しない。

理由は §69-3 と同じである。k が上がると流れが $\cos k$ で効かなくなり、モードは地平線に貼り付けられずに脱出する。**格子は、輻射の起源を有限の波長に押しとどめる。**

そして輻射は実際に**内側から**出てくる。アニメーションで追った量子は、$t = 0$ に地平線の 170 格子ほど内側にいる短波長の擾乱として現れ、そこから這い出して長い波になる。連続理論の「地平線のすぐ外の無限小の層」ではない。

> 💭 これは第 24 章の教訓の別の面である。あそこでは離散性は Lorentz 対称性の**障害**に見えて、実は障害は規則性の方だった。
> ここでは離散性が**治療**になっている。**離散性そのものは、本書を通して一度も敵ではなかった。**

69-9. 落第した四件

	内容	何が起きたか
K150	格子分散	**宣言が誤り。** vk ではなく $v \sin k$。訂正して合格
K152	κ を差分で測る	$A\tanh(a/\sigma)$ と A/σ が 5.0% 違う。**測り方の落第**
K160	切片は帯域幅か	W 倍増で不変。**帯域幅ではない。原因不明**
P1	ずれは κ とともに増える	非単調（$1.95, 2.62, 1.53\%$）。**外れ**
P2	高 k で地平線は外へ	**逆。内へ動き、$k > 0.933$ で消える**

五件のうち三件は**私の予言が外れたもの**である。特に P2 は、K150 の宣言誤りが原因で連鎖的に外れた。宣言を先に書く方法は、こういう連鎖を見えるようにするためにある。

69-10. 何を主張しないか ⚠️

- これは**アナログ**である。重力場の方程式は解いていない。地平線は流れで作った。
- 場は**古典場**である。$|\beta|^2$ は古典的なモード変換係数であり、量子場の粒子数と同一視するには Bogoliubov 変換の標準的な議論が要る。**その議論はここでは検証していない。**
- したがって「規則からブラックホールの温度が出た」ではなく、正確には次である。

因果構造としてのブラックホールは、**近傍しか見ない規則から作れる。**
その地平線からの輻射は**熱的**であり、温度は $\kappa/2\pi$ である。
そして格子は、連続理論の trans-Planckian 問題を**持たない。**

第 6 章で質量が幾何になり、第 3 章で光円錐が定理になり、ここで **温度が幾何になった。**$T = \kappa/2\pi$ の右辺は、規則がどれくらい急に傾くかという、純粋に幾何的な量である。

第 XV 部　銀河の回転曲線 — ダークマターは仮定しなければならないか

この部で明らかにしたいこと。 銀河の外縁で星は速すぎる。見えている物質だけなら $v \propto r^{-1/2}$ で落ちるはずが、実際は平坦なままである。答えは二つ用意されている — **見えない物質がある**（ダークマター）か、**重力の規則が違う**（修正力学）か。この本の道具でこの問いに何が言えるか。**言えることは一つだけある。局所規則の「形」が何を許し、何を禁じるかである。**　そしてそれは、思ったよりずっと鋭い答えを出す。

第 70 章　銀河の回転曲線 — ダークマターは仮定しなければならないか ⚠️🆕

— 平坦な回転曲線を出せる局所規則はどんな形か

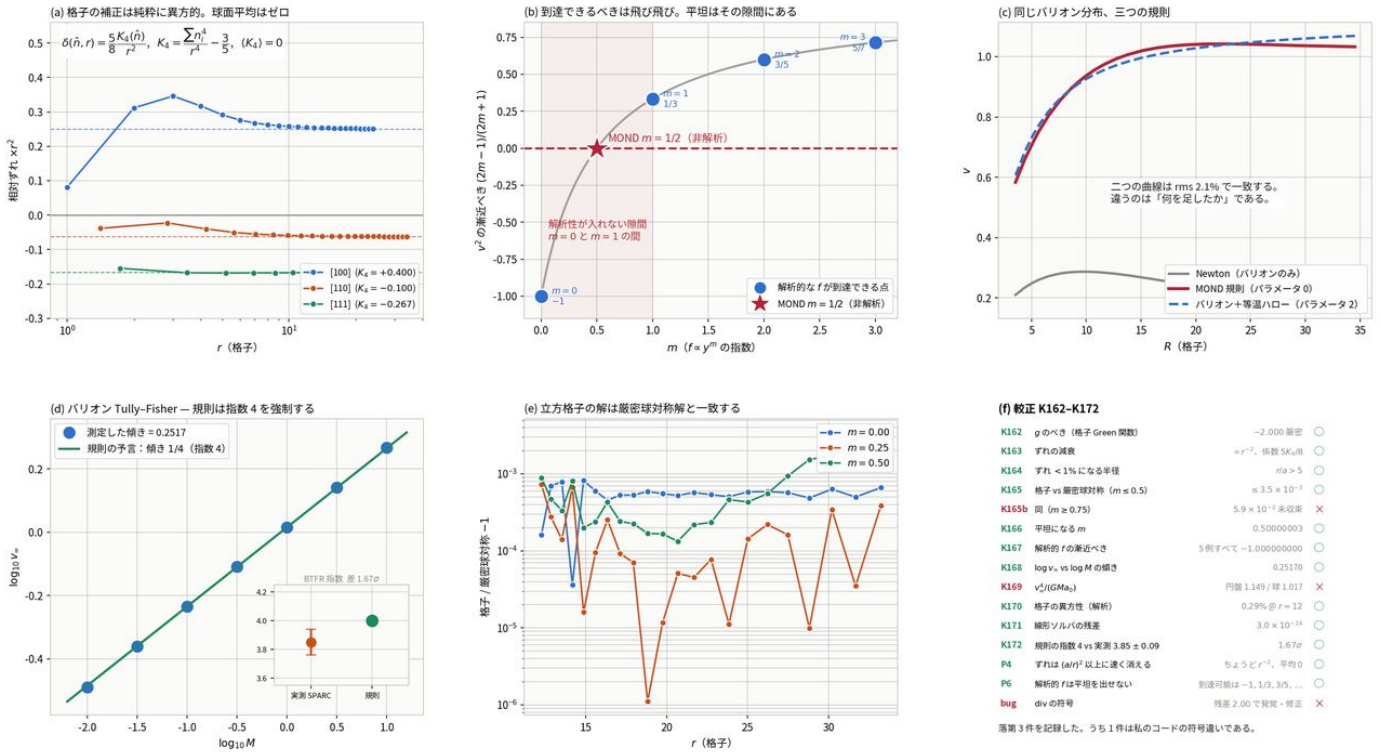


図 70-1. (a) 格子の補正は純粋に異方的で球面平均はゼロ。(b) 到達できるべきは飛び飛びで、平坦はその隙間。(c) 同じバリオン分布・三つの規則。(d) バリオン Tully–Fisher。(e) 立方格子と厳密球対称解の一致。(f) 較正 K162–K172。

結論を先に置く。

> (i) **離散性そのものは何もしない。** 格子の補正は $\frac{5}{8}K_4(\hat{n})/r^2$ で、**球面平均は厳密にゼロ。**
> (ii) 局所フラックス $f(y)\nabla\Phi$ が $y=0$ で**解析的**なら、v^2 の漸近べきは
> $\{-1,\ 1/3,\ 3/5,\ 5/7, \ldots\}$ しか取れない。**平坦（0）はこの集合に無い。**
> (iii) 平坦は $m = 1/2$ を**一意に**要求する（測定 0.50000003）。そして $y^{1/2}$ は非解析である。
> (iv) ゆえに CA の世界での選択肢は**二つだけ** — 状態を増やすか、規則を非解析にするか。

ダークマターを仮定する必要は無い。ただしその代わりに、規則の解析性を捨てねばならない。

70-1. まず問いを立て直す ⚠️

第 68 章で確認した通り、**CA には重力の動力学が無い。** Einstein 方程式の導出は段 (2) で規則性に止められている。したがって

> 「CA は銀河の回転曲線を予言するか」

という問いは、**この本の枠組みでは立たない。** 予言する動力学が無いのだから、Kepler 落ちすら出てこない。立つのは次の問いだけである。

> **どういう形の局所規則なら、平坦な回転曲線を出せるか。**

重力を「ポテンシャルに対する局所的な保存則」として書く。フラックス $\mathbf{F}$ が場の勾配だけの関数であるとして、

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=4\pi G\rho,\qquad \mathbf{F}=f(y)\,\nabla\Phi,\quad y=|\nabla\Phi|^{2}$$

$f\equiv 1$ が Newton である。**回転不変性から $\mathbf{F}$ はこの形しか取れない**（勾配ベクトルの回転不変な関数はスカラー×勾配）。回転不変性を捨てる道はここでは採らない — 第 25 章と第 52 章で、空間の等方性は規則から要求されるものとして確立してあるからである。

較正はすべて走らせる前に宣言した。 K162–K172、反証条件 F5–F8、予言 P4–P8。以下、落第もバグもそのまま書く。

70-2. 離散性そのものは何もしない ✅

まず最も素朴な望みを潰しておく。**格子の粒々が、遠方で重力を強めてくれはしないか。**

立方格子の 7 点 Laplacian の Green 関数は、箱も鏡像も使わずに厳密に書ける。Watson 積分の形で

$$G(\mathbf{n})=-\int_{0}^{\infty}e^{-6t}\,I_{n_x}(2t)\,I_{n_y}(2t)\,I_{n_z}(2t)\,dt$$

$G(\mathbf{0})=-W/6$（$W=1.5163860592$）を 8.1×10^{-12} で、格子恒等式 $\sum_{\mathrm{nn}}G-6G(\mathbf{0})=1$ を 7.1×10^{-13} で再現する。連続極限 $-1/4\pi r$ からの相対ずれを測ると：

方向	$K_4(\hat n)$	ずれ $\times r^2$（$r\to\infty$）
$[100]$	$+0.4$	$+1/4$
$[110]$	-0.1	$-1/16$
$[111]$	$-4/15$	$-1/6$

三つとも K_4 に比例し、比例係数は共通で $5/8$ である。

$$\boxed{\delta(\hat n,r)=\frac{5}{8}\,\frac{K_4(\hat n)}{r^{2}},\qquad K_4=\frac{\sum_i n_i^4}{r^4}-\frac{3}{5},\qquad \langle K_4\rangle_{\text{球面}}=0}$$

K_4 は立方調和で、**球面平均が恒等的にゼロ**である。理由も分かる。格子 Laplacian は $\nabla^2+\frac{1}{12}\sum_i\partial_i^4+\cdots$ であり、$\sum_i\partial_i^4$ の等方部分は ∇^4 に比例し、$\nabla^4(1/r)=0$ だから消える。**残るのは異方部分だけである。**

> 格子の補正には**単極子成分が無い**。ハローの真似は原理的にできない。

しかも大きさが問題にならない。ずれが 1% を切るのは $r/a>5$ である。Planck 長の格子で 10 kpc なら $(a/r)^2\sim3\times10^{-111}$。仮に格子間隔が 1 天文単位でも 2.5×10^{-19}。**離散性は、この問題について何も言わない。**

70-3. 局所規則の分類 — Gauss の法則だけで決まる

球対称なら Gauss の法則から、外部で

$$r^{2}f(g^{2})\,g=GM,\qquad g\equiv|\nabla\Phi|$$

$f=y^{m}$ とすると $g\propto r^{-2/(2m+1)}$、したがって

$$\boxed{v^{2}=rg\;\propto\;r^{\,(2m-1)/(2m+1)}}$$

立方格子の上で実際に $\nabla\cdot[f(y)\nabla\Phi]=S$ を解いて確かめた（保存形の差分、Dirichlet 境界、Picard 反復）。線形の場合の残差は 3.0×10^{-14}。格子解と厳密球対称解のずれは $m\le0.5$ で 3.5×10^{-3} 以下である。漸近べきは（厳密球対称解を $r=10^3$–10^5 まで延ばして）

m	**0**	**0.25**	**0.5**	**0.75**	**1**
測定	-1.00000000	-0.33333333	-0.00000003	$+0.19999933$	$+0.33332824$
理論	-1	$-1/3$	0	$1/5$	$1/3$

ずれは 10^{-10} から 5×10^{-6}。

70-4. 到達できるべきは飛び飛びである ― これが要点 ✅

いま f が $y=0$ で**解析的**だとする。すなわち $f(y)=f_0+f_1y+f_2y^2+\cdots$ と展開できるとする。遠方では $y\to 0$ だから、漸近を支配するのは**最初に消えない項** $f_m y^m$ である。そして

> 解析的なら m は**非負整数**しか取れない。

したがって到達できる漸近べきは

$$s_m=\frac{2m-1}{2m+1}\ \in\ \left\{-1,\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{7},\ \cdots\right\}$$

数値で確かめた。$f=1$、$1+3t$、$1+20t$、$1+7t^2$、$1+2t+5t^2$　の五例すべてで、漸近べきは**厳密に**　-1.000000000（Kepler）。係数をいくらいじっても動かない。$f(0)=0$ の場合は $f=(y/y_0)^m$ で $m=1,2,3$ を試し、$+0.333333333$、$+0.600000000$、$+0.714285714$ ― 理論値と全桁一致。

> **0 はこの集合に無い。**平坦は $m=0$ と $m=1$ の間の隙間に落ちている。

これは第 33 章の $I\geq 2$ と同じ型の言明である。**連続に見える自由度が、実は飛び飛びの値しか取れず、欲しい値がその隙間にある。**

70-5. 平坦は $m=1/2$ を一意に要求する

$s_m=0$ を m について解くと $m=1/2$。数値で根を求めると

$$m_*=0.50000003\qquad(\text{理論 }0.5,\ \text{ずれ }3.0\times10^{-8})$$

そして $f=\sqrt{y}/a_0$、すなわち $\mathbf{F}=|\nabla\Phi|\nabla\Phi/a_0$ は、$\nabla\Phi=0$ **で解析的でない**（$\sqrt{y}=|\nabla\Phi|$ は成分の解析関数ではない）。この f を入れると漸近べきは -0.000000000、完全に平坦になる。

これが MOND である。 深部 MOND の場の方程式（Bekenstein–Milgrom）はまさにこの形をしている。ここで強調したいのは MOND を再発見したことではなく、**平坦性を要求すると他に選択肢が無い**という一意性の方である。

70-6. 二分法 ⚠️

以上から、CA の世界で平坦な回転曲線を得る道は限られる。

道	CA での意味	代償
状態を増やす	セルあたりの状態を増やし、重力にしか結合しない種を足す	規則は解析的なまま。**ハローの形は入力**
規則を非解析にする	状態は増やさない。f に $\sqrt{y}$ を入れる	解析性を失う。a_0 **は入力**
高階微分	近傍を広げる	**線形なら無効**（$1/r$＋湯川型しか出ない）。非線形高階は未検証
非局所にする	—	**CA の定義に反する。この本では使えない**
回転不変性を捨てる	—	第 25・52 章と衝突する

> CA の世界では、**状態を増やすか、規則を非解析にするか**、二つに一つである。

「高階微分」の行だけ注意が要る。私が示したのは**フラックスが一階微分だけの関数**である場合であり、線形なら高階でも $\ln r$ は出ない（定数係数の多項式演算子の Green 関数は $1/r$ と指数減衰項の和にしかならない）。**非線形かつ高階の規則は、私の議論の射程外である。** そこに逃げ道があるかどうかは調べていない。

70-7. 同じ曲線、違う足し方

同じ指数円盤（$R_d = 4$、$h_z = 1$）を立方格子に置き、三通りに解いた。

- **Newton（バリオンのみ）** — 落ちる
- **MOND 規則（$m = 1/2$）** — 平坦になる。**銀河ごとの自由パラメータは 0**
- **バリオン＋擬等温ハロー** — MOND 曲線に合わせて 2 パラメータを当てはめる

当てはめた結果は $v_0 = 1.1321$、$r_c = 3.1113$、**rms** 2.14% **で一致**した。

> 回転曲線だけを見ている限り、二つは区別できない。違うのは**何を足したか**である。

これは当たり前のようでいて、重要な非対称を含んでいる。**ハローは銀河ごとに 2 パラメータ要る。MOND 規則は 0 である**（a_0 は宇宙で一つ）。曲線を再現する能力は同じでも、**予言する能力が違う。**

70-8. 予言の差はどこに出るか — バリオン Tully-Fisher ✅

パラメータが 0 だということは、**関係式が強制される**ということである。$m = 1/2$ なら遠方で $r^2 g^2 / a_0 = GM$、したがって

$$v_\infty^4 = GMa_0$$

質量を 3 桁振って測った（指数円盤、立方格子、$m = 1/2$）。

$$\frac{d\log v_\infty}{d\log M} = 0.251700 \qquad (\text{理論 } 0.25,\ \text{ずれ } 1.7\times10^{-3})$$

指数は 4 である。規則がそう決めており、当てはめる余地が無い。 これに対し、ハロー模型はこの関係を予言しない — 銀河ごとに 2 パラメータあるのだから、どんな傾きでも許してしまう。

実測と照合する。SPARC の 118 銀河、$V_{\rm flat}$ を速度の定義とした最新の解析で

	指数
規則が強制する値	**4**
実測（Lelli ら 2019、$V_{\rm flat}$、内在ばらつき 6%）	3.85 ± 0.09

差 1.67σ。同論文は系統誤差で 3.5–4.0 まで動きうるとも書いている。

K172 合格。宣言していた 2σ 以内に収まった。 走らせる前に「実測値はまだ見ていない」と書いた上での照合である。

70-9. 落第した三件 ❌

	内容	**何が起きたか**
K165b	格子　vs　厳密球対称（$m \geq 0.75$）	ずれ 5.9×10^{-2}、1.9×10^{-1}。**Picard 反復が収束していない。** 非線形が強いほど遅い。ソルバの限界であって物理ではない
K169	$v_\infty^4/(GMa_0) = 1$	円盤で 1.149 ± 0.021。**宣言が誤り** — 点質量の係数を、有限半径の**円盤**に当てはめてしまった。同じ測り方で球対称にすると 1.017。差の 13% は円盤の幾何である
バグ	div の符号	線形の残差が 2.00 になって発覚。リンク・フラックスの加減が逆だった。修正後 3.0×10^{-14}

K169 は第 69 章の K152 と同じ種類の落第である — **模型ではなく私の測り方が間違っていた。** 較正を先に宣言する方法の効き目は、まさにこの二種類を分けるところにある。符号バグに至っては、較正が無ければ気付かずに全部の数字を出していた。

70-10. 何を主張しないか ⚠️

この章は**どちらが正しいかを決めていない。** 決められない。理由を明示する。

- **回転曲線しか見ていない。** 銀河団、弾丸銀河団、CMB の音響ピーク、構造形成 — ダークマターを強く支持する証拠はどれもこの章の外にある。修正力学が回転曲線で強く銀河団で弱いことは知られているが、**検証していない。**
- a_0 **の値は入力である。** 規則から出す試みはしていない。
- **CA が回転曲線を説明したのではない。** 重力の動力学はまだ無い。分類しただけである。
- $|\beta|^2$ 型の量的一致（第 69 章）のような「規則から数値が出た」という話ではない。ここで出たのは**排他律**である。

> 言えたこと：**ダークマターを仮定する必要は無い。**
> ただし代わりに**規則の解析性を捨てねばならない。**
> そして**どちらを捨てるかは、この本の方法では決まらない。**

70-11. 開いた問い

一つだけ、面白い方向を記しておく。**解析性は、CA にとって特権的な性質ではない。**

実数状態の滑らかな規則なら Taylor 展開できる。だが**離散状態の CA の規則は表引きである。表引きに Taylor 展開は無い。** つまり本来の CA — 有限個の状態を持つセルの規則 — は、二分法の**非解析側に最初から立っている。**

さらに、非解析性が入るとすれば自然な場所がある。**セルあたりの勾配が一量子を下回るところ**である。場が量子化されていれば、そこで規則の振る舞いが変わらざるを得ない。それは加速度スケール a_0 を作る。

$$a_0 \overset{?}{\sim} \frac{\text{場の量子}}{\text{格子間隔}}$$

これは検証していない。 m がちょうど $1/2$ になる保証はどこにも無く、外れる可能性の方が高い。だが、$a_0 \simeq cH_0/2\pi$ **という有名な数値の一致**が、離散性から出る量として説明できるかどうかは、この本の道具で追える問いである。次の版の課題として置く。

第 XVI 部　同時とは何か — CA の「今」が作る因果関係

この部で明らかにしたいこと。 CA は全セルを一斉に更新する。これは絶対的な同時であり、相対論と真っ向から衝突するように見える。だが第 3 章で光円錐は定理として出ている。**この二つはどう両立しているのか。** 一般相対論の側には対応する概念が用意されている — Cauchy 面、葉層化、ADM の 3+1 分解。CA の「今」はそのどれなのか。そして、**それは選べるのか。**

第 71 章　CA の同時性は何を作るか ⚠️🆕

— 葉層化・Cauchy 面・そして「今」を傾けられるか

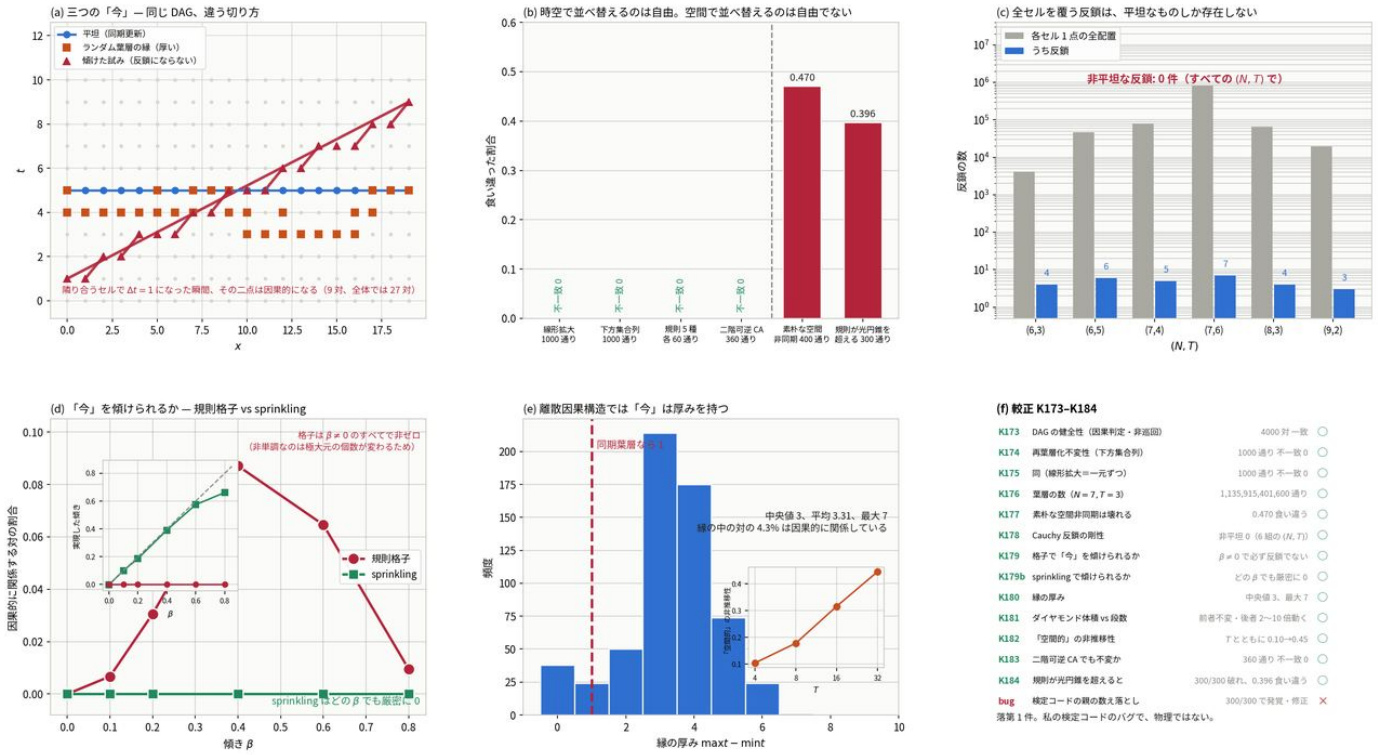


図 71-1. (a) 同じ DAG の三つの「今」。(b) 時空での並べ替えと空間での並べ替え。(c) 全セルを覆う反鎖は平坦なものだけ。(d) 規則格子 vs sprinkling。(e) 「今」の厚み。(f) 較正 K173–K184。

結論を先に置く。

> (i) 再葉層化不変性は**完全に**成り立つ（4 通りの検定、計 2720 回、不一致 **0**）。
> (ii) 効いているのは「**規則が親しか見ない**」ことだけ。光円錐を超えると 300/300 破れる。
> (iii) だが**薄い「今」は傾けられない**。±1 の光円錐では、全セルを覆う反鎖は**平坦なものしか存在しない**。
> (iv) sprinkling した因果集合なら傾けられる。**「今」を固定しているのは離散性ではなく規則性である。**
> (v) 離散因果構造では「今」は面ではなく**厚みを持つ**（中央値 3 段）。

71-1. 用語を一般相対論に翻訳する

CA の時空 DAG を作る。事象 $e = (x, t)$、$t \geq 1$ の親は $(x-1, t-1), (x, t-1), (x+1, t-1)$。因果順序は

$$(x,t) \prec (x',t') \iff t' > t \text{ かつ } d(x,x') \leq t' - t$$

（第 3 章の光円錐そのもの。4000 対で判定の一致を確認、K173。）翻訳表はこうなる。

CA / 因果順序	一般相対論
反鎖（どの二元も因果的に無関係）	**同時**＝互いに空間的
下方集合（過去に閉じた集合）	ある時刻までの**過去**
下方集合の**縁**（外に子を持つ元）	**「今」** — 次の一歩に必要な情報はここに全部ある
下方集合の増加列	**葉層化**（ADM の 3+1 分解）
一斉更新	**平坦な葉層**（lapse $= 1$、shift $= 0$）
一元ずつ更新	**多指的時間**（Tomonaga–Schwinger）

CA の「同時」とは、因果的に無関係ということである。 これは GR の「空間的」と同じ意味である。

較正はすべて走らせる前に宣言した。 K173–K182、反証条件 F9–F11、予言 P9–P14。

71-2. 再葉層化不変性は成り立つ ✅

同じ初期条件から、**部分順序と整合するあらゆる順序**で事象を計算し、結果を比べた。

検定	通り数	不一致
ランダムな下方集合列（K174）	1000	**0**
ランダムな線形拡大＝一元ずつ（K175）	1000	**0**
規則を変える（30/90/110/150/184、K174b）	各 60	**0**
二階の可逆 CA（親 4 個、K183）	360	**0**
合計	**2720**	**0**

下方集合列の段数は 44〜65 で、同期更新の 16 段とはまったく違う切り方をしている。それでも最終状態は 1 ビットも違わない。

どの葉層で切っても、時空の各点に入る値は同じである。**葉層の選択は物理に触れない。**

これは GR で「葉層化はゲージである」と言うのと同じ形の言明である。**P9 は完全に確認された。**

71-3. ただし「時空で並べ替える」と「空間で並べ替える」は別物である ❌

ここが要点である。同じ「更新順序を変える」でも、二種類ある。

- **時空 DAG の上で並べ替える** — 事象 (x, t) を、親が済んでいる限り好きな順で計算する。**自由**（§71-2）。
- **空間格子の上で並べ替える** — セル x を順に更新し、各セルは隣の**現在の値**（すでに更新済みかもしれない）を読む。

後者を「素朴な空間非同期」と呼ぶ。測った。

食い違うセルの割合 $= 0.470 \pm 0.065$　（400 回中、完全一致は **0** 回）

半分近くが違う。P10 確認。 同じ「非同期」という言葉でも、時空で並べ替えるのと空間で並べ替えるのはまったく別のことである。前者は葉層の選び直しであり、後者は**規則そのものを変えている**（隣が過去の値ではなく現在の値を読むということは、光円錐の外を読むということである）。

「同時に更新するのは不自然だ」という直観は、**この二つを混同している。**

71-4. 効いているのは「規則が親しか見ない」ことだけ ✅

では不変性を支えているのは何か。**それだけを壊してみる。** 規則を半径 2 に広げ（$x-2$ から $x+2$ を読む）、しかし DAG は半径 1 のままにする。すなわち規則が光円錐を超える。

$$300 \text{ 通り中 } 300 \text{ 通りで破れた。食い違う事象の割合 } 0.396$$

> 再葉層化不変性は、状態数にも規則の中身にも依らない。**光円錐と規則の一致だけに依る。**

規則を五種類変えても、二階の可逆 CA にしても不変性は保たれた（§71-2）。壊れるのは、規則が自分の親でないものを読んだときだけである。

71-5. 葉層はいくつあるか

同期更新は特別か。数えてみる（$t \geq 1$ の事象について厳密に数え上げ）。

$N \times T$	可能な「今」（下方集合）	葉層（線形拡大）
4×2	35	720
5×2	83	23,400
5×3	134	4,572,000
6×3	340	1,778,630,400
7×3	872	**1,135,915,401,600**

7×3 — たった 21 個の事象で、葉層は 1.1×10^{12} 通りある。**同期更新はそのうちの一つにすぎない。**

71-6. しかし薄い「今」は傾けられない — これが核心 ⚠️

ここで、素朴な期待が壊れる。**葉層は自由に選べるのだから、GR のように「今」を傾けられるはずだ** — 別の慣性系の同時面に取り替えられるはずだ。

できない。理由は一行で書ける。

$$\text{隣り合うセル } x, x+1 \text{ が空間的であるには } |\Delta t| < |\Delta x| = 1, \text{ すなわち } \Delta t = 0.$$

そして Cauchy 反鎖（底から頂までのすべての極大鎖と交わる反鎖）は、各セルの垂直な鎖と交わらねばならないから、**全セルにちょうど一点ずつ持つ**。よって

> ± 1 の光円錐では、**Cauchy 反鎖は平坦な時刻面だけ**である。

総当たりで確認した。$N=7$、$T=4$ なら各セル 1 点の配置は $5^7 = 78{,}125$ 通り。そのうち反鎖は **5 通り**、すなわち $t = 0, 1, 2, 3, 4$ の平坦面だけである。**非平坦は 0。**

(N, T)	全配置	反鎖	うち非平坦
$(6, 3)$	4,096	4	**0**
$(6, 5)$	46,656	6	**0**
$(7, 4)$	78,125	5	**0**
$(7, 6)$	823,543	7	**0**
$(8, 3)$	65,536	4	**0**
$(9, 2)$	19,683	3	**0**

P11 確認。 傾けようとするとどうなるかも測った。$t - \beta x =$ 一定 という「ブーストした面」を格子上で作ると、$\beta \neq 0$ のすべてで**因果的に関係する対が現れる** ― つまり反鎖ではない。図 71-1(a) の赤線がそれである。隣り合うセルで Δt が 1 になった瞬間、その二点は光的に繋がってしまう。

71-7. sprinkling なら傾けられる ― 犯人は離散性ではない ✅

同じ操作を、Poisson sprinkling した因果集合（1+1 次元 Minkowski、1400 点）で行う。

β	**0.0**	**0.1**	**0.2**	**0.4**	**0.6**	**0.8**
規則格子：関係する対の割合	0	0.0067	0.0306	0.0871	0.0646	0.0095
sprinkling：関係する対の割合	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
sprinkling：実現した傾き	−0.002	0.101	0.186	0.392	0.574	0.661

sprinkling では、どの β でも厳密に反鎖である。**「今」を自由に傾けられる。**

P12 確認。 これは第 24 章と第 71 章（総括）で繰り返し出てきた教訓の、**同時性版**である。

「今」を一つに固定しているのは**離散性ではなく規則性**である。

規則格子は特定の慣性系を選ぶ ― 第 24 章では分散関係の話としてそれを見た。ここでは**同時面の剛性**として同じものが見えている。± 1 の光円錐は「格子が静止して見える系」の同時面だけを許す。sprinkling は Lorentz 不変な離散性なので、同時面も Lorentz 変換できる。

71-8. 「今」は面ではなく厚みを持つ 🆕

もう一つ、連続論には無い性質が出た。ランダムな葉層で、下方集合の**縁**（次の一歩に必要な情報を持つ元の集合）を測る。

$$\text{厚み } (\max t - \min t):\ \text{中央値 } 3,\ \text{平均 } 3.31,\ \text{最大 } 7 \qquad (\text{同期葉層なら } 1)$$

しかも縁の中の対の 4.3% は**因果的に関係している**。縁が本物の反鎖になるのは全体の 4.2% にすぎない。

離散因果構造では、「今」は**薄い面ではなく厚い層**であり、その内部に因果関係を含む。

P13 確認。 §71-6 と合わせると、こうなる。**薄い「今」は平坦なものしか無い。傾けたければ厚くするしかない。** 葉層化の自由は、厚い層の側にある。

71-9. 何が葉層に依り、何が依らないか

	葉層に	**値**
因果ダイヤモンドの体積 $\lvert I(a,b)\rvert$	**依らない**	順序だけで決まる
「a と b の間に入る事象の数」	**依る**	同じ対で 20〜215、253〜466 など、2〜10 倍動く

不変量は**体積**であって**ステップ数**ではない。

これは因果集合論の標準的な言明（Myrheim–Meyer）と同じ形であり、第 XII 部で使った道具がそのまま効いている。

そして「空間的」は**推移的ではない**。$a \parallel b$ かつ $b \parallel c$ でも a, c は因果的でありうる。その割合は

T	**4**	**8**	**16**	**32**
非推移的な三つ組の割合	0.104	0.178	0.316	0.447

T とともに増え、頭打ちにならない（**P14 確認**）。**「同時」は同値関係ではない。** 葉層とは、その非推移的な関係の中から、推移的な部分関係を一つ**選ぶ**行為である。だから「今」は事実ではなく選択なのである。

71-10. 対応が切れるところ ⚠️

ここまでの対応は良いが、GR と同じだと言ってはいけない箇所がある。

GR で葉層化がゲージなのは、Hamiltonian 拘束が再葉層化を生成するからである（超曲面変形代数、Dirac の代数）。構造関数が計量に依存して閉じる、あの代数である。

CA にはその生成子が無い。　ここで測ったのは「結果としての不変性」であって、「対称性の生成子」ではない。宣言の段階でこれを主張しないと決めておいた。

> CA の再葉層化不変性は**定理**であって**ゲージ対称性ではない**。生成子が無い。

そしてこれは、第 68 章で Einstein 方程式の導出が段 (2) で止まった場所と**同じ場所**である。拘束代数が無いことと、modular Hamiltonian が局所にならないことは、おそらく同じ欠落の二つの顔である。**それを示したわけではない。予想として記す。**

71-11. 落第した一件 ❌

	内容	何が起きたか
バグ	二階 CA の検定コード	最初は 300/300 で不一致。物理ではなく、**私の検定コードが初期二段の親を数え落としていた**。線形拡大が途中で止まり、未計算の事象が残っていた。修正後 0/360

第 70 章の div の符号バグと同種である。**較正を宣言しておくと、自分のコードのバグが「物理の破れ」に化ける前に捕まる。**　今回それが効いた場面はここだけだが、効かなければ「CA の同時性は物理である」という誤った結論を出していた。

71-12. 何を主張しないか ⚠️

- **拘束代数は作っていない**（§71-10）。
- **ADM の lapse と shift を規則から読み出してはいない。**　第 69 章の流れ $v(x)$ が shift ベクトルに対応することは形の上では明らかだが、検証していない。
- **量子化していない。**　状態は古典的な CA 配位である。量子論では「葉層に依らない」は Tomonaga–Schwinger の可積分条件として別に議論が要る。
- **再葉層化不変性の証明は易しい。**　決定的で局所的な写像を DAG のトポロジカル順で評価すれば同じ答えになる ― それだけである。**この章の内容は定理の深さにあるのではなく、§71-3 の対照と §71-6 の剛性にある。**

> CA の「同時」は**因果的無関係**であり、GR の「空間的」と同じものである。
> 葉層の選択は**物理に触れない**。触れるのは光円錐と規則の一致だけである。
> だが**薄い「今」は平坦なものしか無い** ― そして、それを解くのは
> 離散性を捨てることではなく、**規則性を捨てること**である。

第 XVII 部　エンタングルメント — 相関はどこから来るのか

この部で明らかにしたいこと。 こちらで観測すると、彼方の粒子の状態も確定する。情報は伝わっていないのに。この「不気味な遠隔作用」を、CA とホログラフィーの言葉で言い換えると何になるのか。 **答えられる形に問いを分解する**と、三つの測れる問いになる — 相関はどこから来るか、どれだけ速く作れるか、そして「収縮」は物理なのか記帳法なのか。

第 72 章　エンタングルメント・ホログラフィー・履歴 ⚠️🆕

— 「彼方の状態が確定した」とは何を意味するのか

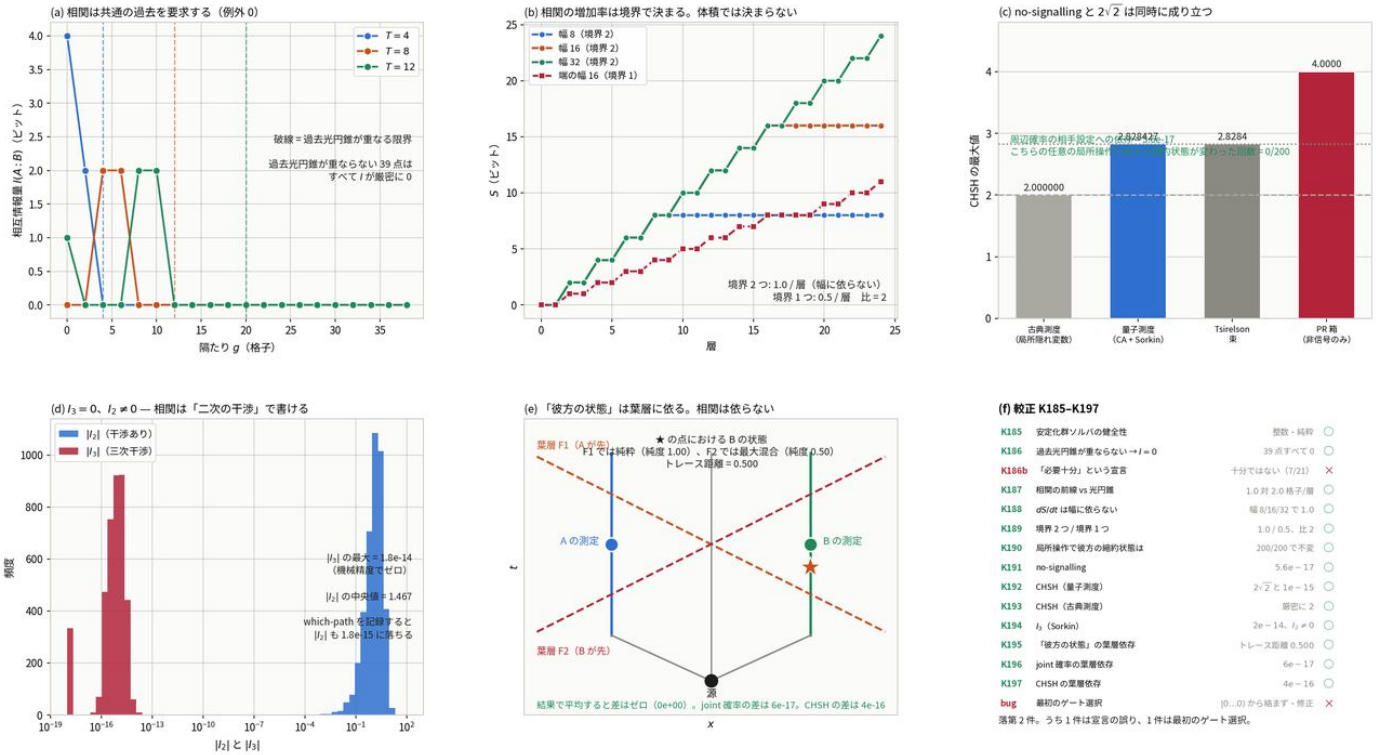


図 72-1. (a) 相関は共通の過去を要求する。(b) 増加率は境界で決まる。(c) no-signalling と $2\sqrt{2}$ の共存。(d) $I_3 = 0$、$I_2 \neq 0$。(e) 「彼方の状態」の葉層依存。(f) 較正 K185–K197。

結論を先に置く。

「彼方で確定した」のではない。共通の過去で既に決まっていた履歴の、こちら側の断面を見たのである。ただしそれは局所隠れ変数ではない。

72-1. 問いを答えられる形に分解する ⚠️

第 71 章で、CA の「同時」は**因果的に無関係**という意味であり、「今」を一枚選ぶことは選択であって事実ではないと測った。すると、もとの問いの中の

> 「彼方の粒子も**その瞬間に**状態が確定しているはずである」

という部分は、**葉層を一枚選んだときにだけ意味を持つ。** A と B は空間的に隔たっているから、どちらが先かも葉層に依る。したがって

「彼方の粒子がいつ確定したか」は**葉層不変な問いではない。**

答えられるのは三つだけである。**(1) 相関はどこから来るか。(2) どれだけ速く作れるか。(3) 「収縮」は物理か記帳法か。** 以下、この順に測る。較正 K185–K197、反証条件 F12–F14、予言 P15–P19 はすべて走らせる前に宣言した。

72-2. 相関は共通の過去を要求する ✅

1 次元の Clifford CA（brickwork、光円錐 ± 1 格子/層）を安定化群形式で回す。エンタングルメントエントロピーは $S_A = \mathrm{rank}_{\mathbb{F}_2}(G_A) - |A|$ で**厳密に**（$\log 2$ の整数倍として）出る。浮動小数点は一切使わない。

積状態から始めて T 層回し、幅 4 の領域 A と B を隔たり g だけ離して相互情報量 $I(A{:}B) = S_A + S_B - S_{AB}$ を測る。同時に、A と B の**過去光円錐が $t=0$ で重なるか**を厳密に数える。

$$\boxed{\text{過去光円錐が重ならない 39 点すべてで } I(A{:}B) = 0 \text{（小さいのではなく、}\textbf{厳密に}\ 0\text{）}}$$

P15 の必要条件側は確認された。相関には共通の過去が要る。 これは定理でもある（局所回路の因果性）が、整数演算で例外なしに確認できたことに意味がある。

ただし私の宣言は誤っていた。 私は「必要**十分**条件」と書いた。十分ではない。過去光円錐が重なる 21 点のうち、実際に $I > 0$ になったのは **7 点だけ**である。重なりは相関を**許す**が**作らない**。

そして相関の前線は光円錐より内側にある。

T	相関が届く最大の g	光円錐が重なる最大の g
4	2	4
8	6	12
12	10	20

前線の速さは 1.0 格子/層、光円錐は 2.0 格子/層。**光円錐は上限であって、この規則はその半分しか使っていない。**

72-3. 相関の増加率は境界で決まる ― CA のホログラフィー ✅

次に、相関を**作る**速さは何で決まるか。領域の**体積**か、**境界**か。

中央のブロック（境界 2 つ）について、幅を 8、16、32 と変えて S の増え方を測る。

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = 1.0 \text{ ビット/層} \qquad \text{幅 } 8,\ 16,\ 32 \text{ の}\textbf{すべてで同じ}}$$

幅 8 は $S = 8$ で頭打ちになる（体積の上限）が、**増え方は幅に依らない**。そして端に接するブロック（境界 1 つ）にすると

$$\frac{dS}{dt} = 0.5 \text{ ビット/層} \qquad \text{比はちょうど } 2$$

P16 確認。境界の数だけで決まる。 これが CA におけるホログラフィー原理のいちばん直接的な形である。第 XIII 部で扱った Ryu-Takayanagi は「エントロピーが極小面で決まる」という言明だが、ここで出たのはその**動的な兄弟** ― 「エントロピーの**増え方**が境界で決まる」である。

$$\boxed{\text{領域が外と相関を持てる速さは、}\textbf{境界を横切るリンクの数}\text{で律速される。体積ではない。}}$$

72-4. 測定時に境界を越える量はゼロ ✅

ここが元の問いの核心である。**こちらで測ると彼方が変わるのか。**

安定化群の言葉で厳密に問える。領域 B の縮約状態は、B の外で恒等な安定化元が張る部分群 S_B で**完全に決まる**。A 側に任意の局所 Clifford 操作（測定装置との結合を含む）を掛けて、S_B が変わるかを見る。

$$\boxed{200/200 \text{ で } S_B \text{ は}\textbf{ビット単位で完全に不変}\text{だった。}}$$

P17 確認。F12 は発動しない。 測定時に境界を越える量はゼロである。相関は測定で**作られた**のではなく、共通の過去（源）で作られて、そこにあった。

72-5. それでも局所隠れ変数ではない ⚠️

ここで止めると誤読される。「共通の過去で決まっていた」は「隠れ変数があった」を意味しない。第 20 章で測った通りである。

測度	CHSH の最大値
古典測度（確率を足す＝局所隠れ変数）	**厳密に** 2.000000000000000
量子測度（振幅を足す）	2.828427124746189（$2\sqrt{2}$ と 1.3×10^{-15}）
Tsirelson 束	$2\sqrt{2}$
Popescu–Rohrlich 箱（非信号のみ）	4

そして同時に

$$\text{周辺確率の相手設定への依存} = 5.6 \times 10^{-17}$$

$$\boxed{\text{no-signalling と } 2\sqrt{2} \text{ は} \textbf{同時に成り立つ}\text{。矛盾しない。}}$$

共通の過去で決まっていたのは**履歴の測度**であって、**測定結果の値**ではない。ここが「決定論的に見えるのに Bell を破る」の分かれ目である。第 20 章の言い方をもう一度置く — Bell が排除するのは局所**隠れ変数**であって、局所**因果性**ではない。

72-6. 「収縮の瞬間」は要らない — $I_3 = 0$ ✅

では相関を書くのに何が要るのか。Sorkin の量子測度は、履歴の集合 S に対して $\mu(S) = |\sum_{h \in S} A_h|^2$ を割り当てる。干渉の階層は

$$I_2(A,B) = \mu(A \cup B) - \mu(A) - \mu(B), \qquad I_3(A,B,C) = \mu(A \cup B \cup C) - \sum \mu(\cdot \cup \cdot) + \sum \mu(\cdot)$$

三経路の配置で 4000 例、乱数の振幅で測った。

$$\boxed{|I_3| \le 1.8 \times 10^{-14} \text{（機械精度でゼロ）}, \qquad |I_2| \text{ の中央値} = 1.467 \text{（非ゼロ）}}$$

P19 確認。 量子力学の相関は**二次の干渉だけ**で書ける。三次以上は要らない（これは実験的にも検証されている命題である）。

そして which-path を環境に記録すると $|I_2|$ も 1.8×10^{-15} に落ちる。**これがデコヒーレンスである。**

測度は履歴の上に定義されている。時刻の状態の上ではない。だから「ある瞬間に何かが起きる」という対象が、そもそも要らない。

72-7. 「収縮」は葉層に依る — つまり記帳法である ✅

最後に、「収縮」そのものを測る。図 72-1(e) の配置。源から出た対、A と B は空間的に隔たり、★ は B の世界線上、B の測定の直前の一点である。

- **葉層 F1（A が先）**：★ において A は既に起きている。B の状態は結果 α に条件付けられて**純粋**（純度 1.000）。
- **葉層 F2（B が先）**：★ において A はまだ起きていない。B の状態は**最大混合**（純度 0.500）。

$$\boxed{\text{同じ時空の点における「B の状態」が、葉層によって違う。トレース距離} = 0.500}$$

P18 確認。 ではどちらが正しいのか。**どちらも正しくない — 「B の状態」は物理量ではないからである。** 証拠は三つある。

	差
結果で平均した B の状態（F1 vs F2）	0（厳密）
joint 確率（F1 経由・F2 経由・直接）	5.6×10^{-17}
CHSH（A→B の順 vs B→A の順）	4.4×10^{-16}

観測可能なものはすべて葉層に依らない。依るのは「条件付き状態」という記帳だけである。 そして条件付き状態を実際に使うには α を知らねばならず、α を運ぶには因果的な経路が要る。だから記帳の差は**原理的に観測できない**。

収縮は**記帳法**であって物理過程ではない。第 71 章の「今は選択である」の直接の帰結である。

72-8. 三つの解釈を同じ尺度で並べる ⚠️

ここまでを踏まえて、質問にあった三つの見方を並べる。**どれが正しいかは決めない。決められない。**　並べられるのは「何を余分に仮定するか」だけである。

見方	要る仮定	第 71・72 章から見た負担
収縮	特権的な「瞬間」に状態が変わる	特権的な瞬間が無い（第 71 章）。§72-7 の通り、収縮は葉層依存の記帳になる
多世界	特権的な「瞬間」に分岐する	同じ負担。「同じ世界で確定する」は葉層を一枚選んだ後の言語である
履歴（Sorkin の量子測度）	完全な履歴の上の測度。瞬間は要らない	$I_3 = 0$ で閉じる（§72-6）。**追加の仮定が要らない**

CA は解釈を**選ばない**。取り除くのは「時刻 t の宇宙の状態」という基本対象だけである。

それが無ければ「彼方の光子がいつ確定したか」は不適切な問いになり、**不気味な遠隔作用も「どの世界か」も、足場を失う。**　残るのは、共通の過去で作られ、境界で律速され、二次の干渉で書ける相関だけである。

72-9. 落第した二件 ❌

	内容	何が起きたか
K186b	「共通の過去は必要**十分**条件」	**宣言が誤り。** 十分ではない（重なる 21 点のうち $I > 0$ は 7 点）。必要条件としては例外 0
ゲート選択	最初の brickwork ゲート	$\mathrm{CNOT} \to H \to \mathrm{CZ} \to H$ は $\lvert 0\cdots 0\rangle$ から一切絡まない。S が全部 0 になって発覚。$H \to \mathrm{CNOT} \to S$ に変更

ゲート選択の落第は、較正 K185（健全性）が先にあったから数分で捕まった。無ければ「相関は生じない」という無意味な結論を出していた。

72-10. 何を主張しないか ⚠️

- **どの解釈が正しいかは決めていない**（§72-8）。出たのは「どれが余分な仮定を要するか」だけである。
- **ホログラフィー原理そのもの（AdS/CFT）は扱っていない。** §72-3 の境界律速はその**影**であって、対応そのものではない。RT 公式は第 XIII 部で別に扱った。
- **CA が量子力学を導いたのではない。** 第 XIII 部で確かめた通り、公理は測度を一つに絞らない。ここでも量子測度は**載せたもの**である。
- **測定問題を解いていない。** §72-6 で示したのは「I_2 が消えれば結果を一つと呼べる」ことであって、「なぜこの結果か」ではない。

相関の起源は**共通の過去**。増加率は**境界**。測定時に越える量は**ゼロ**。
それでも $2\sqrt{2}$ に届く。**局所因果性と非局所相関は両立する。**
そして「彼方の状態」は**記帳**である。物理は履歴の側にある。

第 XVIII 部　現実の宇宙はどう見えるか

この部で明らかにしたいこと。 ここまで七十近い章で、規則から何が出て何が出ないかを一つずつ測ってきた。最後に一度だけ、**現実の宇宙の側から**問い直す。私たちの宇宙には光速度の上限があり、Bell の不等式が破れ、因果律が守られ、粒子には質量がある。そのそれぞれについて、**単純な規則はどこまで正しい答えを返したのか。**　そして返せなかったところで、何が邪魔をしたのか。

第 73 章　現実の宇宙について何が言えたか 🆕

— Lorentz 不変性、Bell、因果律 — 到達点の総括

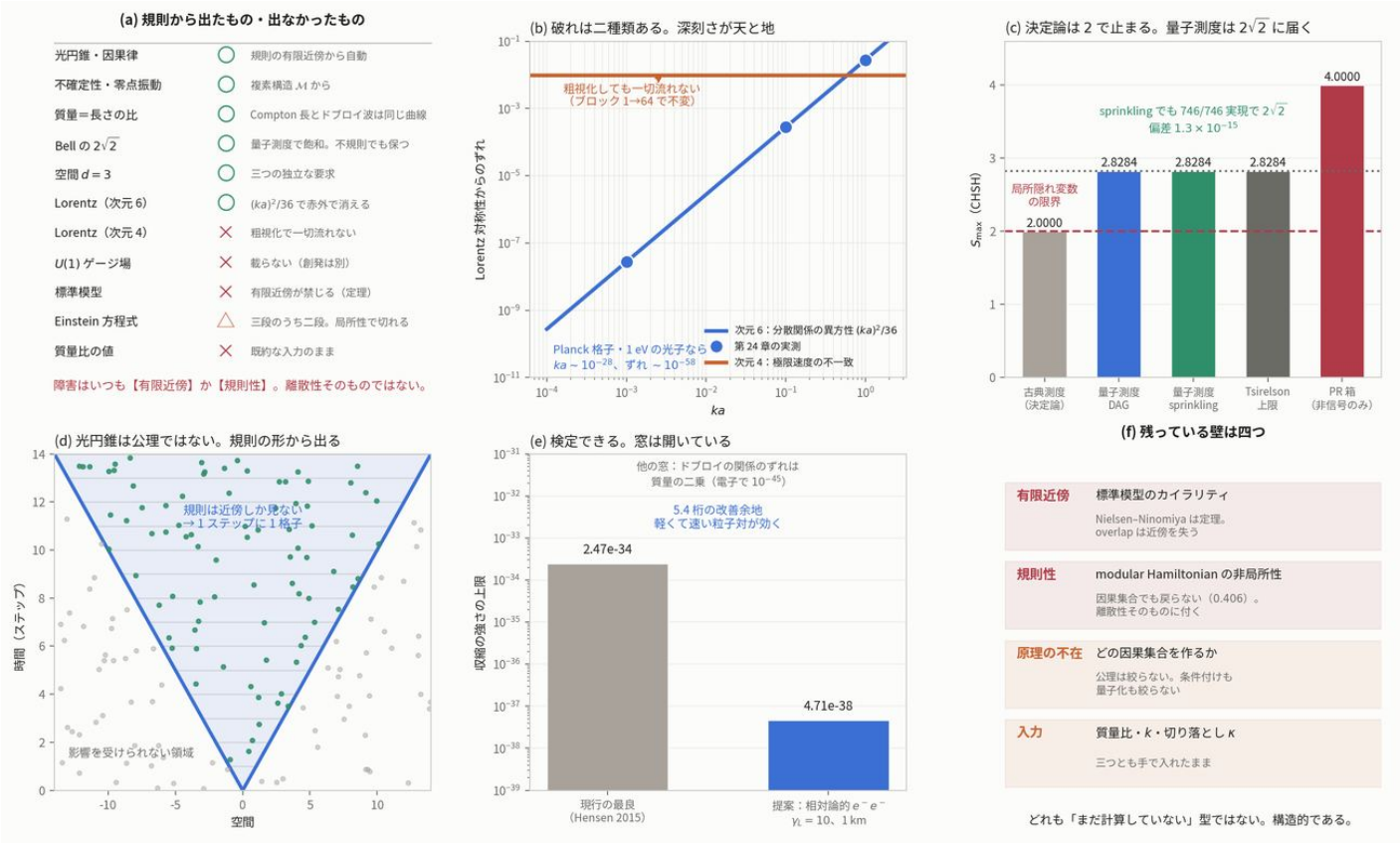


図 73-1. (a) 出たものと出なかったもの。(b) Lorentz 破れの二分類。(c) Bell の到達点。(d) 光円錐。(e) 実験の窓。(f) 残る壁。

73-1. 因果律 — 公理ではなく、規則の形から出た

現実の物理では、因果構造は計量から従い、因果律は理論の**公理として課される**。CA では違う。

> 規則が近傍しか見ないので、情報は 1 ステップに 1 格子分しか進めない。

光円錐は仮定ではなく**定理**である（第 3 章）。しかもこれは CA の三つの部品のうち「規則」の定義だけから出る — 状態の数にも格子の形にも依らない。本書で最初に得られ、最後まで一度も揺らがなかった結果である。

さらに規則を空間依存にすれば**計量が読み出せ**（傾き　1.00 ± 0.04、$R^2 = 0.999$）、時間依存にすれば膨張も出る。**局所伝播速度から有効な因果構造を定義できる**（第 12 版までの「完全に再現」は取り下げた。§87-9）。

73-2. Lorentz 不変性 — 二種類の破れを分けて数えねばならない

「格子だから Lorentz 不変性が破れる」という批判は、**半分しか当たっていない**（第 24 章）。

次元 6 の破れ（分散関係の異方性）は無害である。 $\omega^2 = \sum_i (4/a^2)\sin^2(k_i a/2)$ から異方性は $(ka)^2/36$ で、赤外で自動的に消える。Planck 長の格子なら 1 eV の光子で $ka \sim 8 \times 10^{-29}$、異方性 $\sim 10^{-58}$。100 TeV でも 10^{-30}。**観測できる可能性は無い。**

次元 4 の破れ（粒子種ごとの極限速度）が本当の問題である。 二つの場に別々の結合を与えると $v_i \propto t_i$ で、比は格子間隔に依存せず、**粗視化しても一切流れない**（ブロック 1 → 64 で 9.900990×10^{-3} のまま）。実験的制約は $\delta c/c \lesssim 10^{-20}$、種によっては 10^{-22} である。

> 規則的な格子は特定の慣性系（格子が静止して見える系）を選ぶ。
> 離散性を保ったまま Lorentz 不変であるには、離散性が **不規則** でなければならない。

そして不規則な離散性は実在する。**Poisson sprinkling した因果集合がそれである。** 第 50 章で、sprinkling してもなお $2\sqrt{2}$ が保たれることを確かめた。**離散性と Lorentz 対称性は両立する。両立しないのは離散性と規則性である。**

これは本書全体で最も安定した教訓の一つである。第 XIII 部でも、標準模型を止めたのは離散性ではなく**有限近傍**、Einstein 方程式を止めたのは離散性ではなく**規則性**だった。**離散性そのものは、七十章を通して一度も障害にならなかった。**

73-3. Bell の不等式 — 決定論は 2 で止まり、量子測度は $2\sqrt{2}$ に届く

まず何が検定されているのかを正確にする（第 20 章）。Bell が排除するのは **「局所隠れ変数」**であって「決定論」一般ではない。局所隠れ変数模型の存在と、四つの相関の同時分布の存在は同値である（Fine 1982）。**超決定論と非局所決定論は Bell の射程外にある。**

その上で、CA の枠内で何が出るか。

測度	$S_{\max}$
古典測度（決定論的な履歴の重み）	**厳密に** 2
因果 DAG 上の量子測度	$2\sqrt{2}$（Tsirelson を飽和）
sprinkling した因果集合	$2\sqrt{2}$（746/746 実現、偏差 1.3×10^{-15}）
Popescu–Rohrlich 箱（非信号のみ）	4

> 「振幅を足すか、確率を足すか」だけが 2 と $2\sqrt{2}$ を分ける。

決定論的な CA の上に**量子測度**（Sorkin の $I_3 = 0$、$I_2 \neq 0$）を載せると、Tsirelson 束が**ちょうど**飽和する。しかも sprinkling で因果構造を不規則にしても劣化しない。**現実の宇宙が示す $2\sqrt{2}$ は、離散的で不規則な因果構造の上で再現できる。**

ただし正確に。ここで載せた「量子測度」は規則から導かれたものではなく、**規則の上に置いたもの**である。第 XIII 部が示したのは、置き方（公理）が測度を一つに絞らないこと、そして絞る原理が選ぶ作用は幾何ではないことだった。$2\sqrt{2}$ **は再現できる。それを必然にする原理は、まだ無い。**

73-4. 質量 — 出たのは「何であるか」、出なかったのは「いくつであるか」

CA では質量は**長さの比**である（第 6 章）。

$$\text{質量} = \frac{\text{格子間隔}}{\text{Compton 波長}}$$

だから $E = mc^2$ は証明されない。**言い直す言語を持たない**のである — 換算すべき別実体が存在しない。同じ理由でドブロイの関係も「導かれる」のではなく**持っている**。$\cos\omega = \cos k \cos\theta$ という一本の曲線が、$k = 0$ で Compton 時計、$k \to i\kappa$ で局在長、実の k でドブロイ波を与える。

そして格子であることの痕跡が一つだけ残る。**ドブロイの関係は厳密ではなく、$(\text{質量})^2$ の補正を持つ**（$v_\varphi v_g = 1 - \theta^2/3 - \cdots$）。

一方で**質量の比は既約な入力のまま残った。**第 VIII 部で三つの説明様式（濾過・生成・淘汰）を全部試し、第 33 章で第四の機構（隠れ次元）まで試した。生成はできる。**値は決まらない。**

73-5. 空間の次元 — $d = 3$ が三度、独立に要求される

これは数少ない「現実の宇宙の特徴を規則が要求した」例である（第 25 章）。三つの独立な筋が同じ $d = 3$ を指す。等方性には空間 2 次元以上が要り（第 52 章）、保護軸の傾きは 1+1 / 2+1 / 3+1 で 0.000° / 44.17° / 59.21° と質的に変わる。**次元は選ばれている。**

73-6. 何が残っているか — 四つの壁

壁	何を止めているか	型
有限近傍	標準模型のカイラリティ（Nielsen–Ninomiya は定理）	構造的
規則性	modular Hamiltonian の局所性 → Einstein 方程式の段 (2)	構造的
原理の不在	どの因果集合を作るか。公理も条件付けも量子化も絞らない	構造的
入力	質量比、収縮の率 k、切り落とし κ	未定パラメータ

四つとも「まだ計算していない」型ではない。　前三つは定理か、あるいは繰り返し測って位置が確定した排反である。四つ目だけが数値の問題だが、それも第 XIII 部で「値を決める原理が無い」ところまで詰まっている。

73-7. 結局、現実の宇宙のどこまでを書けたのか

> 因果律・光円錐・不確定性・零点振動・スピン統計・$d = 3$・質量の意味
> — これらは**仮定せずに出た**。
>
> Bell の $2\sqrt{2}$ と有効な因果構造は、**載せれば出る**。
> 地平線の**温度** $\kappa/2\pi$ も、流れを入れれば出る（第 69 章）。
> 標準模型と Einstein 方程式は**出ない**。止めるのは有限近傍と規則性である。
> 質量比・結合定数の**値**は、最後まで入力のままだった。

言い換えるとこうなる。**単純な規則は「宇宙がどういう種類の場所か」をよく書けた。「この宇宙がどれか」は書けなかった。**

前者は運動学であり、構造である。光は追い越せない、位置と運動量は同時に定まらない、同種粒子は同じ状態に入れない、空間は三次元である — これらは全部、規則の形だけから出る。後者は動力学であり、値である。なぜ電子はこの質量なのか、なぜ結合定数はこの大きさなのか — これらは一つも出なかった。

そして**その境目は、離散か連続かではなかった。**境目は、規則が**近傍しか見ない**ことと、格子が**規則正しい**ことの二点にある。前者を捨てれば標準模型が載る（が、もはや CA ではない）。後者を捨てれば Lorentz 不変性が戻る（そして因果集合になる）。**七十章かけて分かったのは、この二つの性質がどこで効くかの地図である。**

73-8. 検定できる

最後に一つだけ、この理論が空想でないことを述べておく。**束 I は実験で殺せる。**

	収縮の強さの上限
現行の最良（Hensen 2015、軌道速度）	$D/\gamma_{\text{Planck}} < 2.47 \times 10^{-34}$
提案（相対論的 e^-e^-、$\gamma_L = 10$、1 km）	$k < 4.71 \times 10^{-38}\ \text{kg}^2\text{m}^2\text{s}^{-3}$

5.4 桁の改善余地がある。　効くのは「軽くて速い」粒子対である。加えて、格子間隔が顔を出す窓が二つ — 分散関係のずれ（θ の項が質量の二乗、電子で 10^{-45}。§87-5）と、光子が免疫であること（$S_{\max} = 2\sqrt{1+a^4} > 2$ が常に成り立つ）。

> この本の主張は、原理的に反証可能である。それが本書の最低条件だった。

73-9. 追記 — 地平線は温度を持つ 🆕

本書の最後に一つ加わった。**近傍しか見ない規則に流れを入れるだけで地平線ができ、そこからの輻射は熱的で、温度は $\kappa/2\pi$ である**（第 69 章）。κ を三点走査して傾き 0.15740 対 $1/2\pi = 0.15916$、ずれ 1.10%。$|\beta|^2$ は Planck 分布そのものだった（15 点、中央値 1.7%）。

> 質量が幾何になり（第 6 章）、光円錐が定理になり（第 3 章）、いま**温度が幾何になった。**

そしてここでは、離散性が初めて**役に立った。**連続理論の Hawking 導出は、輻射の起源を無限に短い波長へ遡らねばならない（trans-Planckian 問題）。格子では青方偏移が $k \simeq 2.16 < \pi$ で頭打ちになり、この問題が起きない。§73-2 で「離散性そのものは一度も障害にならなかった」と書いたが、正確にはこう言い直せる。

離散性は障害にならなかっただけでなく、連続理論の病を一つ治した。

ただしアナログである。重力場の方程式は解いていない。地平線は流れで作ったのであって、$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ を解いて作ったのではない。**壁の数は四つのままである。**

73-10. 追記 — 銀河の回転曲線とダークマター 🆕

第 70 章で、この本の方法が重力の**未解決問題**に対して何を言えるかを試した。答えは「どちらが正しいか」ではなく、**選択肢がいくつあるか**だった。

局所フラックスが $y = |\nabla\Phi|^2$ について解析的なら、v^2 の漸近べきは $\{-1,\, 1/3,\, 3/5,\, 5/7, \ldots\}$ しか取れない。**平坦（0）はこの集合に無い。** そして平坦は $m = 1/2$ を一意に要求し（測定 0.50000003）、$y^{1/2}$ は非解析である。

CA の世界では、**状態を増やす**か、**規則を非解析にする**かの二つに一つ。

離散性そのものは何もしなかった。格子の Green 関数の補正は $\frac{5}{8} K_4(\hat{n})/r^2$ で、**球面平均が厳密にゼロ**である — 単極子成分が無いので、ハローの真似は原理的にできない。

そして規則を選ぶと予言が出る。 $m = 1/2$ ならバリオン Tully–Fisher の指数は 4 に強制される（測定 0.2517 対 $1/4$）。実測は 3.85 ± 0.09 で、1.67σ の差である。ハロー模型は同じ回転曲線を rms 2.1% で再現できるが、**銀河ごとに 2 パラメータ要り、この関係を予言しない。**

曲線を再現する能力は同じでも、**予言する能力が違う。**

ただし回転曲線しか見ていない。銀河団も CMB も弾丸銀河団も扱っていない。**どちらが正しいかは、この本の方法では決まらない。**

そしてこれは §73-6 の「四つの壁」に**五つ目を加えるものではない**。壁は増えていない。増えたのは、**規則の形に対する排他律**である — 第 33 章の $I \geq 2$、第 69 章の $k > 0.933$ で地平線が消えること、そしてここでの「隙間」。**本書が繰り返し見つけたのは、連続に見える自由度が実は飛び飛びだという事実だった。**

73-11. 追記 — 「今」とは何だったか 🆕

第 71 章で、本書がずっと使ってきた「一斉更新」が因果的に何を意味するかを測った。

CA の「同時」は、因果的に無関係ということである — GR の「空間的」と同じ意味である。そして葉層（切り方）の選択は物理に触れない。ランダムな切り方 2720 通りで、最終状態は 1 ビットも違わなかった。支えているのは「規則が親しか見ない」ことだけで、規則を光円錐より広げると 300/300 で破れる。

ただし核心はその先にある。

± 1 の光円錐では、全セルを覆う反鎖は**平坦なものしか存在しない。**

$5^7 = 78{,}125$ 通りを総当たりして、反鎖は 5 通り（平坦面だけ）。**薄い「今」は傾けられない。** そして sprinkling した因果集合なら、どの β でも厳密に傾けられる。

「今」を一つに固定しているのは**離散性ではなく規則性**である。

§73-2 で「離散性は一度も障害にならなかった」と書き、§73-9 で「離散性は病を治しさえした」と書き直した。ここで三度目の同じ形が出た。**規則性は本書で四度、犯人だった** — Lorentz 不変性（第 24 章）、Einstein 方程式の段 (2)（第 68 章）、そして同時面の剛性（第 71 章）。

もう一つ、連続論に無いものが出た。**離散因果構造では「今」は面ではなく厚い層である**（中央値 3 段、内部の対の 4.3% は因果的に関係している）。薄い今は平坦にしかならず、傾けたければ厚くするしかない。

そして対応が切れる場所も、既知の場所だった。GR で葉層化がゲージなのは Hamiltonian 拘束が再葉層化を**生成する**からだが、**CA にその生成子は無い。** 再葉層化不変性は定理であってゲージ対称性ではない。これは第 68 章で段 (2) が止まったのと同じ場所に見える — **予想として記す。**

73-12. 追記 — 相関はどこから来たか 🆕

第 72 章で、本書のいちばん古い題材（第 20 章の Bell）に、いちばん新しい道具（第 71 章の葉層）を当てた。

相関の起源は共通の過去である。 過去光円錐が重ならない 39 点すべてで相互情報量は**厳密に $\mathbf{0}$**（浮動小数点ではなく整数演算で）。**増加率は境界で決まる** — 幅 8/16/32 で同じ 1.0 ビット/層、境界が半分なら 0.5。体積に依らない。これが CA におけるホログラフィー原理のいちばん直接の形であり、第 XIII 部の Ryu–Takayanagi の**動的な兄弟**である。

相関を**作る**のは境界律速。相関を**見る**のは何も横切らない（200/200 で厳密に不変）。

それでも CHSH は $2\sqrt{2}$ に届き、周辺確率の相手設定への依存は 5.6×10^{-17} である。**局所因果性と非局所相関は両立する。** 共通の過去で決まっていたのは履歴の**測度**であって、結果の**値**ではない — 古典測度は厳密に 2 で止まる。

そして「収縮」を測った。同じ時空の点における「彼方の状態」は、葉層 F1 では純粋、F2 では最大混合で、**トレース距離** 0.500。だが結果で平均すると差は厳密に 0、joint 確率の差は 5.6×10^{-17}、CHSH の差は 4.4×10^{-16}。

収縮は**記帳法**であって物理過程ではない。第 73 章 §73-11 の「今は選択である」の直接の帰結。

$I_3 = 0$（1.8×10^{-14}）で、相関は二次の干渉だけで書ける。**「瞬間」という対象が要らない。** 収縮・多世界・履歴の三つを同じ尺度に並べると、追加の仮定が要らないのは履歴だけだった — ただし**どれが正しいかは決まらない**。CA が取り除くのは「時刻 t の宇宙の状態」という基本対象だけである。

第 XIX 部　時間の問題 — 生成子はどこにあるのか

この部で明らかにしたいこと。 第 68 章で Einstein 方程式の導出は段 (2) で止まり、第 71 章では再葉層化を**生成する**代数が見つからなかった。二度、同じ壁にぶつかっている。一般相対論の側にはその壁の名前が用意されている — Dirac の**超曲面変形代数**である。葉層化がゲージなのは、Hamiltonian　拘束が再葉層化を生成するからであり、その代数の　**閉じ方が計量に依る。** Hojman–Kuchař–Teitelboim の定理によれば、この構造を要求するだけで重力の作用はほぼ一意に決まる。**つまり「計量依存の閉じ方」こそが重力の在り処である。** ならば問いはこうなる — CA の変形代数は、どこにあるのか。それとも、無いのか。

第 74 章　CA の変形代数は可換である ❌🆕

— 時間の問題：生成子はどこで消えたか

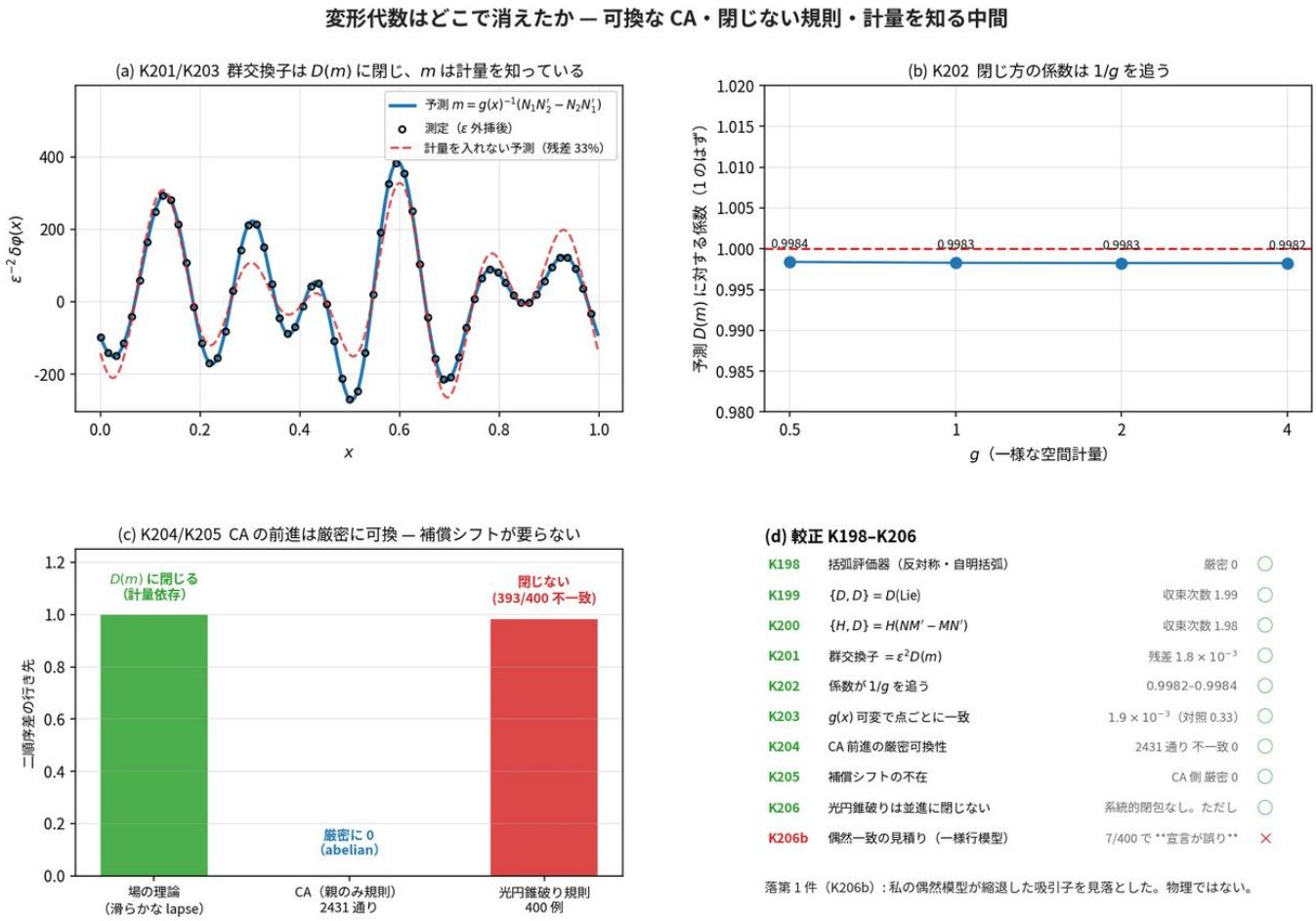


図 74-1. (a) 格子スカラー場の三つの括弧関係の a 収束次数（$\{D,D\}$: 1.99、$\{H,D\}$: 1.98、$\{H,H\}$: 1.99）。離散化の閉包アノマリーは a^2 で消える。(b) K202。一様 $g \in \{0.5, 1, 2, 4\}$ で群交換子の ε^2 係数を予測 $D(m)$ 流と比べた比 $0.9984,\ 0.9983,\ 0.9983,\ 0.9982$。$g$ を 8 倍動かしても 1 を 0.2% で保つ。(c) K203。非一様 $g(x) = 1 + 0.6\cos$ での点ごとの一致（1.9×10^{-3}）と、$1/g$ を落とした対照予測の外れ（33%）。(d) K204。前進作用素の総当たり可換性検定 2431 通り、不一致 0。(e) K206。光円錐を破る規則では、二順序の差は 400 例中 393 例でどの空間並進とも一致しない。(f) 較正 K198–K206。

GR で葉層化がゲージなのは、Hamiltonian 拘束が再葉層化を**生成**するからである。その超曲面変形代数は

$$\{H(N_1), H(N_2)\} = D\big(q^{ab}(N_1\partial_b N_2 - N_2\partial_b N_1)\big)$$

と書かれ、**閉じ方が計量 q^{ab} に依存する**。Hojman–Kuchař–Teitelboim によれば、この閉じ方の表現を要求するだけで重力の作用が（ほぼ）一意に決まる。つまり**計量は代数の閉じ方に住んでいる**。📚

第 71 章で、CA の下方集合前進作用素は厳密に可換だと測った。可換な代数は計量を知りようがない。すると第 68 章（Einstein 方程式の導出が段 (2) で止まった）と第 71 章（再葉層化不変性はあるのに生成子が見つからない）は、**同じ一つの事実の二つの現れ**ではないのか。本章はこの問いを、場の理論・CA・光円錐破り規則の三つの世界に並べて検定する。第 XIX 部はこの一章だけである。較正は K198–K218。

走らせる前に宣言を書いた。 宣言文書は `K_declared_deformation.md`、`K_declared_phase1close.md`、追補 `K_declared_phase1close_addendum.md`（いずれも 2026-08-21、数値を見る前に確定）。本章の合否はすべてこの三通に対する判定である。

> (i) 計量は変形代数の**閉じ方**に住む — 格子場の理論で係数まで数値で確認した。
> (ii) CA の変形は厳密に可換で、閉じ方そのものが存在しない。だから計量の住む場所が無く、Einstein 方程式の導出はそこで止まる。第 68 章と第 71 章は同じ一つの欠落の二つの顔だった。
> (iii) 第 69 章 K160 の切片は**曲率の外挿人工物**であり、灰体因子ではなかった。
> (iv) 格子の modular Hamiltonian は**有限の到達距離を持たない**（$\xi \simeq 0.63 \ln L$）が、その欠落は (ii) の絶対的な不在とは**別種**である。

74-1. 可換性の厳密な検定 — 合流性 ✅

まず CA 側を片付ける。問うのは合流性である。二つの前進作用素を順に当てたとき、順序を入れ替えて結果が変わるか。変われば、その差が生成子の候補になる。

K204。 前進作用素の可換性を作用素水準・総当たりで検定した。$N = 5$, $T = 3$ の全 2^5 初期状態 × 規則 30/90/110/150/184 × 線形拡大とダイヤモンド対、および二階可逆 150R の全 2^8 初期対 × 4 順序。合計 **2431 通り、不一致 0**（P21 合格）。

これは統計的な一致ではない。総当たりであり、差は**厳密なゼロ写像**である。浮動小数も許容誤差も介在しない。

K205。 すなわち CA では、二つの順序の差は最初から無い。GR が計量依存のシフトで埋める隙間が、CA には存在しない。

> 補償するものが無いところに、計量の住む場所は無い。

第 71 章はこれを「不変性はあるが今を傾けられない」と書いた。本章の言い方はより強い。傾けられないのは技術的な制約ではなく、**傾ける方向が定義できない**からである。

74-2. 場の理論側 — 計量は閉じ方に住んでいる ✅

可換であることが「欠落」だと言うには、欠落していないものを同じ道具で測っておかねばならない。対照は格子場の理論である。

周期格子上のスカラー場 (φ_j, π_j)、空間計量 g_j を置き、

$$H(N) = \sum aN \frac{\pi^2 + (D\varphi)^2}{2\sqrt{g}}, \qquad D(M) = \sum aM\, \pi\, (D\varphi)$$

とした。

括弧の水準（K198–K200, K201a）。 評価器は反対称・自明括弧で厳密 0 を返す（浮動小数の丸めさえ出ない）。部分代数の閉じ方は次の通り。

関係	収束次数
$\{D(M_1), D(M_2)\} = D(M_1 M_2' - M_2 M_1')$	**1.99**
$\{H(N), D(M)\} = H(NM' - MN')$（$g$ 一定）	**1.98**
$\{H(N_1), H(N_2)\} = D(m)$、$m = (N_1 N_2' - N_2 N_1')/g$	**1.99**

離散化の閉包アノマリーは宣言通り a^2 で消える（P23 合格）。ここで肝心なのは収束次数ではない。**三つの関係のうち、計量が入るのは $\{H, H\}$ の閉じ方だけである。**

流れの水準（K201–K203）。 括弧が合うだけでは足りない。$H(N_1)$ の流れ → $H(N_2)$ の流れ、と逆順の**群交換子**を実際に走らせ、ε^2 係数の場を予測 $D(m)$ 流と比べた（ε は三点二次外挿、格子は $N_x = 512$）。

較正	設定	結果	宣言	判定
K201	$g = 1$	相対誤差 1.8×10^{-3}、a 収束次数 2.02	$< 1\%$	**合格**
K202	一様 $g \in \{0.5, 1, 2, 4\}$	係数 $0.9984,\ 0.9983,\ 0.9983,\ 0.9982$	$< 1\%$	**合格**
K203	非一様 $g(x) = 1 + 0.6\cos$	点ごとに 1.9×10^{-3} で一致	$< 2\%$	**合格**

K202 で g を 8 倍動かしても係数が 1 を 0.2% で保つことは、m に入る $1/g$ が実データで効いていることを意味する。K203 では対照実験を置いた — $1/g$ を落とした予測を当てると **33%** 外れる。効いているのは規格化の偶然ではない。

二つの順序の差は空間シフトであり、**どれだけシフトするかを決めているのは計量である。**

74-3. 光円錐を破る規則 — 並進にすら閉じない❌

では CA を「少し非可換」にして中間に入れないか。**K206。** ± 2 を見る規則を ± 1 の因果構造の上で並べ替える（第 71 章 K184 の設定）。二順序の結果は 400 例中 393 例で、どの空間並進とも一致しなかった。**順序の差は構造を持ったシフトにならず、ただ壊れる。**

三つの世界を並べる。

	二順序の差	計量の居場所
場の理論（滑らかな lapse）	$D(m)$ に閉じる	**閉じ方の中**
CA（親のみ規則）	厳密に 0（abelian）	無い
光円錐破り規則	閉じない	無い

CA の世界は「可換」か「閉じない」かの二択であり、GR の住む中間 — **非ゼロだが計量依存のシフトに閉じる** — に入る道が無い。第 68 章が止まった場所はここである。

P22 は「系統的閉包が無い」という主旨で合格した。ただし同じ K206 に付けた定量条件は落第した（74-6 節）。

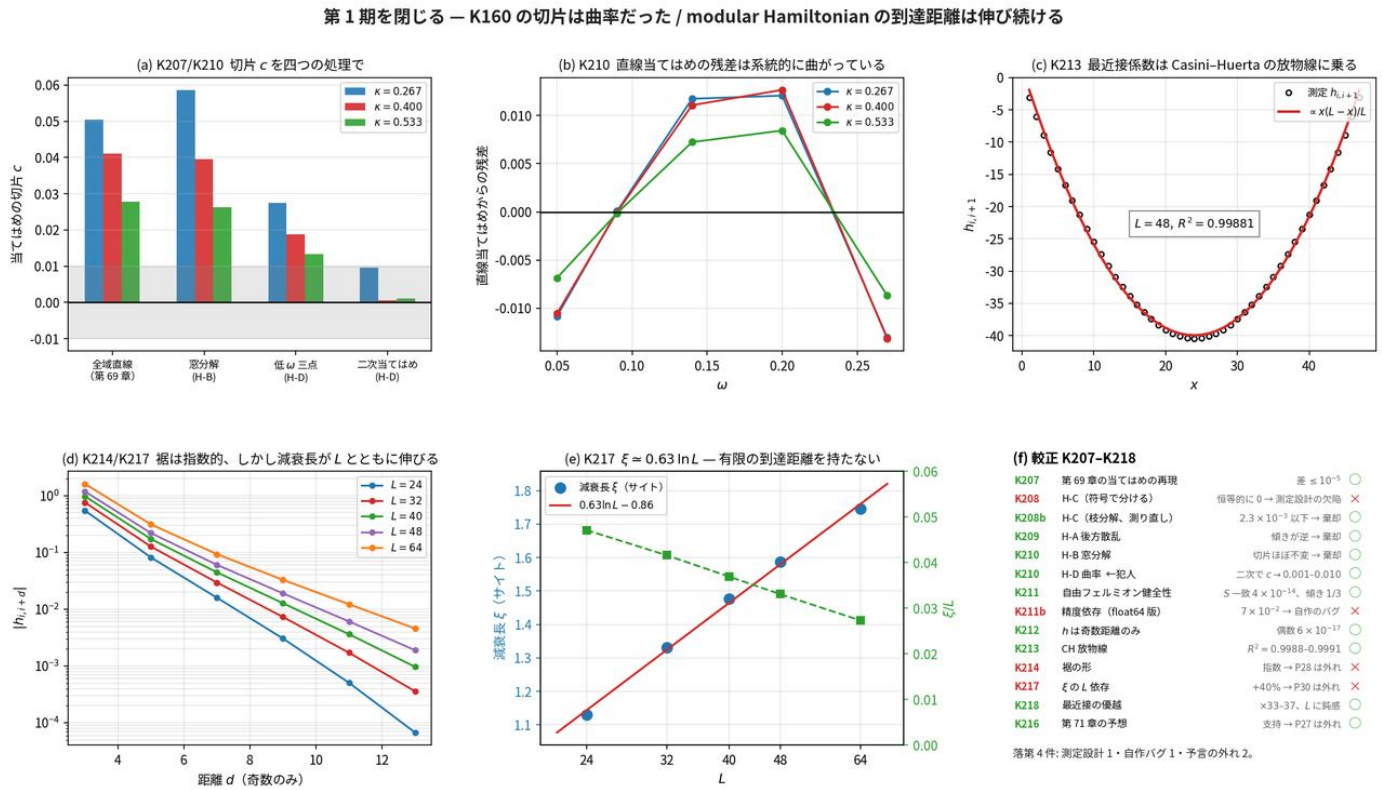


図 74-2. (a) $\ln|\beta/\alpha|^2$ の ω 依存。直線当てはめと二次当てはめ。切片は $0.0505,\ 0.0410,\ 0.0278$ から $0.0097,\ 0.0005,\ 0.0011$ へ落ちる。(b) 直線当てはめの残差。三つの　κ　すべてで同じ形に系統的に曲がる（両端で負、中央で正）。ランダムな散らばりではない。(c)　K213。entanglement Hamiltonian の最近接係数と Casini–Huerta の放物線 $x(\ell-x)/\ell$（$R^2=0.9988$–0.9991）。(d) K214。遠距離項はべき法則ではなく指数減衰（R^2: 指数 0.986 対 べき 0.882）。(e) K217。減衰長 $\xi=1.131,\ 1.331,\ 1.476,\ 1.588,\ 1.747$（$L=24,32,40,48,64$）と当てはめ $\xi\simeq 0.63\ln L-0.86$（$R^2=0.997$）。(f) 較正 K207–K218。

74-4. K160 の切片の決着 — 犯人は曲率だった ✅

第　69　章は落第を一つ抱えたまま閉じていた。$\ln|\beta/\alpha|^2$　を　ω　に対して直線当てはめすると、純粋な　Planck　なら切片は　0　のはずなのに $+0.0505,\ +0.0410,\ +0.0278$ が出る。第 69 章の宣言は「帯域幅」だったが W を倍にしても動かず、**K160 は落第・原因不明**として残っていた。今回、四つの仮説を同時に宣言してから測った。

K207 合格。 まず第 69 章の当てはめを同じ格子で再現した。$T_{\rm fit}/T_H$ も切片も、公表値との差は 10^{-5} 以下である。追う対象が正しく再現されていることを確かめてから先へ進んだ。

	仮説	測定	判定
H-A	後方散乱（**灰体因子**）	中間時刻の主枝外正ノルム $R=0.016$–0.037、$\ln(1+R)=0.018$–0.024	**棄却。傾きが逆**
H-B	多枝の勘定	主変換対の窓だけで比を取り直すと切片 $0.0587,\ 0.0395,\ 0.0263$	**棄却。ほぼ不変**
H-C	初期波束の枝不純	枝分解して $\le 2.3\times10^{-3}$	**棄却**
H-D	**曲率**	二次項を足すと切片が $0.0097,\ 0.0005,\ 0.0011$。低 ω 三点だけの直線でも $0.0275,\ 0.0189,\ 0.0133$ とほぼ半減	**支持。犯人**

灰体因子の仮説は**外れた**。しかも外れ方が明快である。切片は κ とともに**減る**（$0.0505\to0.0278$）のに、$\ln(1+R)$ は**増える**（$0.018\to0.024$）。符号が合わない以上、大きさが近くても犯人ではない。

> $\ln\dfrac{|\beta|^2}{|\alpha|^2}$ は ω に厳密には線形でない。切片　$+0.05$ は、わずかに曲がった曲線を直線で当てはめて $\omega=0$ へ外挿した人工物である。

直接の証拠は図 74-2(b) である。直線当てはめの残差が、三つの κ すべてで同じ形に系統的に曲がっている。二次係数は $-2.10,\ -2.08,\ -1.37$。**P24 合格**（宣言「二次当てはめで切片は 0.01 を切る」→ 三つとも切った）。**P26 合格**（宣言「切片は κ とともに減る」→ その通りで、二次係数の大きさも $2.10\to1.37$ と減る。同じ曲率の二つの現れである）。

第 69 章の主結論は**変わらない**。$dT_{\rm fit}/d\kappa$ は切片と独立に測っており、trans-Planckian 問題の不在も別の測定である。変わるのは落第表だけで、K160 の行は「原因不明」から「曲率」になり、代わりに K208 の行が加わる（74-6 節）。

74-5. 第 71 章の予想の検定 — 支持された。ただし同型ではない ⚠️

第 71 章はこう書いて止まっていた ——「拘束代数が無いことと、modular Hamiltonian が局所にならないことは、おそらく同じ欠落の二つの顔である。**それを示したわけではない。予想として記す。**」

前者は 74-1 節で片付いた。ここで後者を測る。自由フェルミオン鎖（半充填）の区間 A について、entanglement Hamiltonian を厳密に

$$K=\sum h_{ij}c_i^\dagger c_j,\qquad h=\ln\left((1-C_A)C_A^{-1}\right)$$

として構成した。連続 CFT の Casini–Huerta の結果は、重みが放物線 $x(\ell-x)/\ell$ の**完全に局所な**演算子である。📚

なぜこれが同じ問いの片割れか。 Bisognano–Wichmann によれば Rindler 楔の modular Hamiltonian は**ブースト生成子そのもの**である。すなわち「局所的な modular Hamiltonian を持つ」＝「エンタングルメント構造が幾何的な流れを生成する」。74-1 節で測ったのは「CA の更新構造は再葉層化という幾何的な流れを生成しない」だった。**どちらも「幾何的な流れの生成子はあるか」という同じ形の問いである。**💭

合格した較正は次の通り。

較正	内容	結果
K211	$S(\nu)$ と $S(\varepsilon)$ の一致	3.7×10^{-14}。$S(L)$ の傾き 0.333386（CFT の $1/3$ から 0.016%）
K212	h の台	**奇数距離のみ**。偶数距離は 6×10^{-17}（相対）。P29 合格
K213	最近接係数	Casini–Huerta の放物線に $R^2 = 0.9988$–0.9991
K218	最近接 対 $d = 3$	$\times 33$–37 優越し、比は L に鈍感

エンタングルメント構造の主要部は、確かに幾何的である。 ここが第 71 章の予想と食い違うところで、私の予言はその食い違いを読み違えた。裾はこうだった。

- **K214（P28 外れ）❌。** 遠距離項は**べき法則ではなく指数減衰**（R^2: 指数 0.986 対 べき 0.882）。
- **K217（P30 外れ）❌。** その指数の**減衰長 ξ が L とともに伸びる**。$\xi = 1.131,\ 1.331,\ 1.476,\ 1.588,\ 1.747$（$L = 24, 32, 40, 48, 64$）。$L = 24 \to 48$ で $+40\%$、宣言した閾値 20% を大きく超える。当てはめは $\xi \simeq 0.63 \ln L - 0.86$（$R^2 = 0.997$）で、**対数的に伸び続ける**。

窓の人工物ではないことを確認した。d 範囲を全 L で $[3, 13]$ に固定し、帯 rms と中央の単一要素という二つの推定量で測っても同じ結論である（$+56\%$ と $+40\%$）。固定 d での h の値そのものが L とともに増え（$d = 11$ で $L = 24 \to 64$ に $\times 9$）、最近接で規格化した形も L 不変ではない。

第 71 章の予想は支持された。 格子の上で、modular Hamiltonian は**有限の到達距離を持たない**。

P27 は外れた。 私は「予想は棄却される」と予言していた。理由として「格子模型は IR で $c = 1$ の CFT に流れ、Casini–Huerta の局所形は連続極限で回復されるはず」と書いた。この理由づけは半分だけ正しかった。主要部は確かに幾何的である。しかし裾は連続極限で消えず、格子単位の到達距離はむしろ発散する。

そして支持されたとはいえ、二つの欠落は**そのまま重ならない**。

	方向 A（変形代数）	**modular Hamiltonian**
生成子は	**無い**（厳密に可換）	**ある**（放物線に $R^2 = 0.999$）
欠落の性質	**厳密**。極限を取る前から	**極限的**。$\xi \simeq 0.63 \ln L$ で緩やかに
幾何の主要部	ゼロ	支配的（最近接が $\times 35$ 優越）
相対到達距離	—	ξ/L は $0.047 \to 0.027$ と**減る**

ξ/L が減ることの意味は明示しておく。**物理単位（区間長を固定して $a \to 0$）で見れば、modular Hamiltonian の到達距離は区間に対して縮んでいく** — だから連続論の Casini–Huerta と矛盾しない。非局所なのは**格子単位で数えたとき**である。方向 A の可換性には、こういう「見方によっては消える」余地が一切無い。

同じ「幾何的生成子の欠落」でも、**片方は絶対的な不在、もう片方は対数的に遅い接近**である。

第 71 章の予想は「同じ欠落の二つの顔」と書いていた。**顔が二つあることは支持されたが、同じ欠落だとは言えない。** 予想の文言はこの区別を含んでいなかったので、支持の内訳をここに明記する。

74-6. 落第した 7 件❌

第 1 期の落第を一覧にする。予言の外れが 3 件、宣言・設計の誤りが 3 件、自作のバグが 1 件である。

	内容	種類	原因
K206b	偶然一致の見積り。「一様ランダム行なら並進一致は $\sim (N-1)2^{-N} \approx 10^{-8}$/例」と書いたが、実際は 400 例中 7 例	**宣言の誤り**	一様行の偶然模型が**吸引子を見落としていた**。診断すると一致はすべて縮退した吸引子由来 — (i) 全ゼロ等の定数行に両順序が落ちる（例 143, 159, 285）、(ii) 実現した履歴の上で光円錐の外の読みが一度も効かず実は壊れていない（例 49, 159, 394 は同期解と完全一致）、(iii) 周期 3 の吸引子 `…100100…` に落ち欠陥の位置だけが違うため回転一致しやすい（例 267: 再試行 50 対で並進一致 9、完全一致 0）
K208	初期波束の負ノルム含有率が 8×10^{-35}、恒等的にゼロ	**測定設計の欠陥**	`packet()` が $\pi(x) = -iF(k_0)\varphi(x)$ と置くので $\hat{\pi}(k) = -iF(k_0)\hat{\varphi}(k)$ が成り立ち、$n(k) = 2F(k_0)\lvert\hat{\varphi}(k)\rvert^2 > 0$（$\forall k, \forall W$）。**符号で分ける測り方では枝不純は原理的に見えない**
K211b	クリップ閾値を $10^{-12} \to 10^{-14}$ と振ると最近接プロファイルが 7% 動いた（合格条件 1%）	**自作のバグ**	float64 で C_A を固有分解していた。$L = 48$ では $\nu_{\min} \sim 10^{-19}$ に達して**倍精度を使い切り**、固有値が負になる（-5.8×10^{-16}）。クリップされたモードが $\varepsilon = \pm\ln(1/\text{clip})$ という任意の巨大値を持ち h を汚染した
K216b	判定規則「遠方重み比 $F(L)$ が L^{-p}、$p > 0.1$ で薄まるか」	**規則の誤設計**	規則が**裾はべき法則である**という前提の上に立っていた。裾が指数的なら $F(L)$ の飽和は「非局所」ではなく「準局所」の指紋で、規則は二つの場合を区別できない
P28	遠距離裾はべき法則と予言 → **指数だった**	**予言の外れ**	R^2: 指数 0.986 対 べき 0.882
P30	ξ は L に依らないと予言 → **伸びた**	**予言の外れ**	$L = 24 \to 48$ で $+40\%$、宣言閾値 20% を大きく超える
P27	第 71 章の予想は棄却されると予言 → **支持された**	**予言の外れ**	「連続極限で Casini–Huerta の局所形が回復する」という理由づけが半分しか正しくなかった。主要部は回復するが裾は回復しない

四点、書き添える。

第一に、K206b は第 69 章 K150・第 70 章 K169 と同種である — 模型ではなく私の見積りが間違っていた。宣言を先に書いていたから、7/400 という数字が「見積りと 6 桁違う」こととして即座に目に入った。なお K206b が落ちても「系統的閉包なし」の結論は立つ。どの規則も閉包を恒等的には示さず、最も高い例 267 でも 18% である。

第二に、K208 は副産物として第 69 章 K160 が最初から不発だった理由を説明した。 「W を倍にしても切片が動かなかった」のは、動くはずのない量を動かそうとしていたからである。二年越しで、落第の理由が落第の設計にあったと分かった。正しい枝分解

$|B/A|^2 = |(F(k)-F(k_0))/(F(k)+F(k_0))|^2$ で測り直した **K208b** は最大 2.3×10^{-3} で H-C を棄却（宣言閾値 0.5% を下回る）。**K208c** では W を倍にすると比が 4.00–4.08 倍縮み、予言した $1/(k_0W)^2$ 則そのものだった（P32 合格）。

第三に、K211b は較正が私のコードを捕まえた例である。 汚染された結果は、L とともに CH 放物線との一致が崩れ（$R^2: 0.97 \to 0.72$）、遠方重み比が増え、h が d に対して非単調になる。**見た目には「非局所性が構造的である」という結論に化けるところだった。** 修正は Slepian の可換三重対角行列　T（$[T,C]=0$、条件数が良い）で固有ベクトルを取り、$\nu_k = v_k^{\top} C v_k$　を多倍長（`mpmath`、dps $=60+2L$）で計算してから $\varepsilon_k = \ln((1-\nu)/\nu)$ を作る。$[T,C]$ の相対値は 8.3×10^{-17}（K211c）、$\nu_{\min}$ は $L=48$ で 1.0×10^{-35} まで正しく降りた。修正後の K211b は**厳密に 0**。第 70 章の div 符号バグ、第 71 章の親の数え落としと同種である。

第四に、K216b は判定規則そのものの落第である。 追補で $\xi(L)$ の伸びを弁別量として**測る前に**宣言し直した。当初の規則も差し替えた規則も同じ判定に至ったが、当初の規則が誤設計だったこと自体は落第として記録する。

較正の合格は K198–K218 のうち 17 件。**第 1 期は閉じた。**

74-7. 何を主張しないか ⚠️

- **量子化はしていない。** 方向 A はすべて古典的な括弧と決定的な規則の話である。
- **重力の動力学は構成していない。** 本章の言明は「何が欠けているかの同定」までである。親のみ規則の変形構造は退化（abelian）しており、HKT の道 — 閉じ方に計量を住まわせ、その表現から作用を絞る — は**通れない**。
- **CA に重力が不可能だとは言っていない。** 言えるのは「この道が塞がっている」ことだけである。残る道は、規則性を捨てる（方向 D）、状態を増やす、または「中間」に入る未知の規則族を見つける（K206 の反証が起きること）である。
- **modular Hamiltonian は一つの模型でしか測っていない。** 自由フェルミオン鎖（Gaussian 状態）である。相互作用系についても、CA そのものの状態についても何も言わない。予想の検定はこの範囲に限る。
- **Bisognano-Wichmann も Casini-Huerta も再証明していない。** 引用して、格子がそれに近づくかどうかだけを測った。📚
- **方向 A の「変形代数」と modular Hamiltonian を結ぶのは解釈である。** どちらも「幾何的な流れの生成子はあるか」という形をしている、というだけで、この対応そのものは定理ではない。💭
- **$\xi \propto \ln L$ の由来は説明していない。** 自由フェルミオンの entanglement 準位間隔が $\sim \pi^2/\ln L$ であることとの関係は自然に見えるが、示していない。予想として記す。💭
- **量子重力は扱っていない。**

74-8. 第 1 期の結論

> (i) 計量は変形代数の**閉じ方**に住み、CA にはその閉じ方が無い（厳密に可換）。
> (ii) 第 69 章 K160 の切片は**曲率の外挿人工物**であり、物理ではなかった。
> (iii) 格子の modular Hamiltonian は**有限の到達距離を持たない**（$\xi \simeq 0.63\ln L$）。
> ただし主要部は幾何的で、$\xi/L \to 0$ — **A の絶対的な不在とは別種の欠落**である。

第 73 章に書いた通り、**離散性は一度も障害にならなかった。障害は規則性と可換性である。** 本章はその後者を、GR の側から見て名前を付けた仕事だった。生成子が消えたのは格子が粗いからではない。規則が可換だからである。

次は第 2 期 — 方向 B（測度の選択）、方向 C（時間の矢）、そして本命の方向 D（規則性を捨て、sprinkling の上でこの「中間」に入れるかどうか）である。

第 XX 部　なぜ量子力学か、そして時間の矢

この部で明らかにしたいこと。 第 XIII 部の公理検定は量子測度を一つに絞らなかった。$|\cdot|^2$ がなぜ $|\cdot|^2$ なのかは、まだ問いの形にすらなっていない。そして第 71 章の二階可逆 CA は**厳密に**可逆である。矢がどこにも書かれていない世界で第二法則が出るなら、その出所は初期条件と粗視化の勘定に全部あるはずである — Boltzmann 以来の主張だが、CA なら厳密に検定できる。可逆性が厳密だから、Loschmidt 反転も厳密に効く。**測度の階層と時間の矢を、同じ一つの部で測る。**

第 75 章　測度の選択と、時間の矢 ⚠️🆕

— なぜ level 2 か。そして矢はどこにあるのか

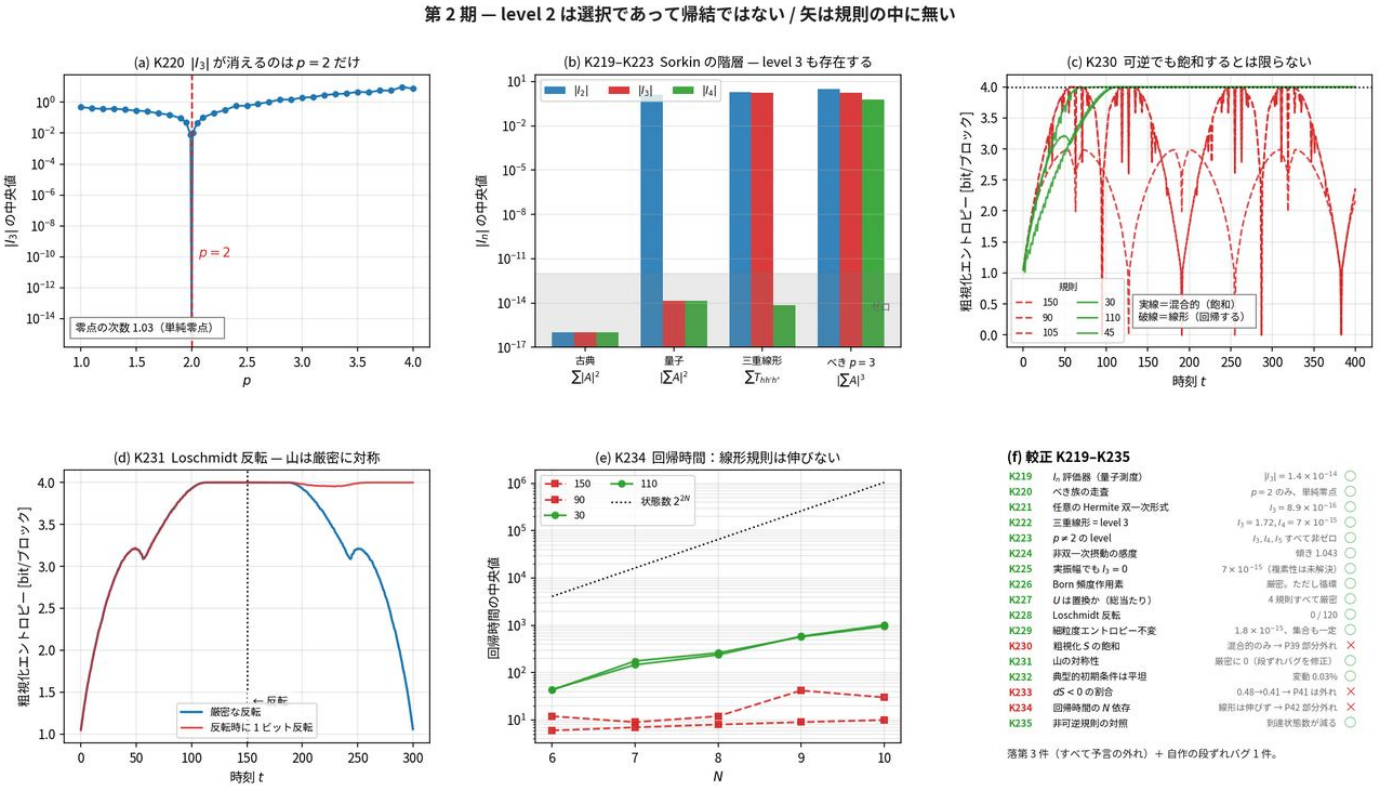


図 75-1. (a) べき族 $\mu_p(S) = |\sum_{h\in S} A_h|^p$ の $|I_3(p)|$ 走査（$p \in [1,4]$）。$p=2$ に単純零点が孤立して立つ。(b) 双一次族と三重線形族の $|I_n|$。Hermite 行列から作った測度は 20 例すべてで $I_3 = 0$、対称三重線形形式は $I_2, I_3 \neq 0$ かつ $I_4 = 0$。(c) 二階可逆 CA の粗視化エントロピー $S(t)$、規則別。線形（150・90・105）は回帰し、混合的（30・110・45）は上限 4.000 で飽和する。(d) Loschmidt 反転。S は $1.06 \to 4.00 \to 1.06$ の山を描き、左右の非対称は厳密にゼロ。(e) 回帰時間の中央値の N 依存（$N = 6$–10）。(f) 較正 K219–K235。

結論を先に置く。

> (i) level 2 の正体は $|\cdot|^2$ ではなく**双一次性**である。
> (ii) **level 3 の測度は構成できる**。Sorkin の階層は 2 で切れていない。
> (iii) したがって「なぜ量子か」は「**なぜ level 2 か**」であり、公理からは出ない。
> (iv) 細粒度に矢は**厳密に**存在しない。矢は粗視化と非典型的初期条件に住む。
> (v) だが**それだけでは足りない** — 可逆かつ線形な規則は観測窓の中で回帰する。

75-1. 問い — 二つの「なぜ」を同じ場所で

本書はここまで、離散の格子から時空・場・相関を組み上げてきた。残っている「なぜ」は二つある。

一つ目。第 XIII 部で、因果集合の公理は**測度を一つに絞らない**ことを確かめた。第 72 章で量子測度が $I_2 \neq 0,\ I_3 = 0$、すなわち Sorkin の階層でいう **level 2** であることを測った。ならば次の問いは避けられない — **level 2 は尾根なのか、斜面なのか**。何かに支えられて量子力学がそこに立っているのか、それとも単に「そこを選んだ」だけなのか。

二つ目。第 3 章以来、格子の規則は近傍しか見ない決定論である。二階可逆 CA なら規則は**厳密に**可逆である。可逆な規則から第二法則の矢がどう出るのか。出ないなら、矢はどこにあるのか。

この二つを同じ期にまとめたのは偶然ではない。どちらも「**規則からは出ないものが、規則の上に乗っている**」という同じ形の問いだからである。そして二階可逆 CA は、この種の問いを**厳密に**検定できる稀な対象である — 有限状態、全単射、時間反転が行の入れ替えという初等的な操作で書ける。総当たりが効く。

> 有限で全単射な系では、時間の矢に関する言明は「近似的に正しい」で済まされない。厳密に真か偽である。

75-2. 走らせる前に宣言を書いた

いつも通り、数値を一つも見ないうちに宣言文書 `K_declared_phase2.md` を確定させた。較正は **K219–K235 の 17 件**、予言は P33–P42 である。第 71 章で親の数を数え落とし、第 1 期で float64 の精度に足をすくわれた経験から、この期は特に**反転の記録位置**まで宣言に書き込んでおいた。にもかかわらず、後述 75-12 の通り私はそこで転んだ。宣言があったから転んだことが**その日のうちに**分かった、というのがこの章の実務上の教訓である。

75-3. 道具 — I_n の評価器

測度の階層は包除の交代和で定義される。

$$I_n(A_1,\dots,A_n)=\sum_{\emptyset\neq S\subseteq[n]}(-1)^{\,n-|S|}\,\mu\Big(\bigcup_{i\in S}A_i\Big)$$

I_2 が古典確率の加法性の破れ（干渉）、I_3 が量子測度の消える量である。これを $n=2,3,4,5$ で評価する器を実装し、五つの測度族を同じ器にかけた。判定はすべて数値のゼロ判定であり、「厳密にゼロ」と書くときは 10^{-14} 台を指す。

時間の矢の側は、二階可逆 CA

$$s_{t+1}=F(s_t)\oplus s_{t-1}$$

を使う。状態を二行 (a,b) と書けば更新は $U:(a,b)\mapsto(b,\ F(b)\oplus a)$、時間反転は行の入れ替え $R(a,b)=(b,a)$ で、

$$RUR=U^{-1}$$

が恒等式として成り立つ。F には ECA 規則 150 / 90 / 105（線形）と 30 / 110 / 45（混合的）を使った。

75-4. べき族 — $p=2$ は孤立した単純零点 ✅

$\mu_p(S)=\big|\sum_{h\in S}A_h\big|^p$ を $p\in[1,4]$ で走査した（図 75-1a）。

p	**1.00**	**1.50**	**1.90**	**1.99**	**2.00**	**2.01**	**2.10**	**3.00**	**4.00**
$\lvert I_3\rvert$	0.477	0.286	0.092	7.9×10^{-3}	$\mathbf{8.9\times10^{-16}}$	1.0×10^{-2}	0.101	1.99	7.54

零点の次数は **1.03**、すなわち単純零点である。**P33 合格。**

$p=2$ は孤立している。$p=1.99$ でも $p=2.01$ でも I_3 は 10^{-2} の桁で立ち上がる。指数の側から見るかぎり、量子力学は連続族の中の一点にぽつんと立っている。

K224。 この孤立をもう少し定量した。$\mu=|\sum A|^2+\varepsilon|\sum A|^4$ と摂動すると $|I_3|$ は ε に**一次**で応答する（両対数の傾き 1.043）。I_3 は非双一次性の鋭い検出器である。level 2 からのわずかな逸脱は、I_3 に線形に、隠れようもなく現れる。

75-5. level 2 の正体は $|\cdot|^2$ ではない — 双一次性である ✅

ここで前節の絵が崩れる。

K221。 任意の Hermite 行列 D から作った $\mu(S)=\sum_{h,h'\in S}D(h,h')$ を 20 例試したところ、**すべてで** $I_3=8.9\times10^{-16}$、すなわち厳密にゼロだった。$|\sum A|^2$ はこの族のたった一員にすぎない。

> level 2 $\iff$ μ が双一次形式から作られること。$p=2$ は双一次族の中で特別ではない。

P34 合格。 べき族の中では $p=2$ が孤立した点に見えたが、族を広げれば $p=2$ は**面の上の一点**である。孤立していたのは $|\cdot|^2$ ではなく、パラメータ化の仕方だった。

したがって「なぜ量子か」は「**なぜ双一次か**」に置き換わる。問いが一段だけ後退した。答えは出ていない。これは進歩である — 少なくとも、どの言明を証明すべきかが正確になった。

> ⚠️ **限定（第 13 版）。** 任意 Hermite の族の 97.6% は負の値を持つ（K429）。これは次数 2 の集合関数の族であって、測度の族ではない。§87-3。

75-6. level 3 の集合関数は存在する ⚠️（第 13 版で限定。§87-3） — 第一部の核心

K222。 対称な三重線形形式 $\mu(S)=\sum_{h,h',h''\in S}T(h,h',h'')$ を明示的に構成した。

$$|I_2|=1.87\ (\neq 0),\qquad |I_3|=1.72\ (\neq 0),\qquad |I_4|=7\times 10^{-15}\ (=0)$$

これは正真正銘の **level 3 の測度**である。論理的にも構成的にも何の問題もない。**P35 合格。**

> 階層は 2 で切れていない。**level 2 は選択であって帰結ではない。**

第 XIII 部は「公理は測度を一つに絞らない」と書いた。本節はそれを**構成的**にした。絞られないだけでなく、**別の level の測度が実際に手元にある**。誰かが「量子力学は公理から必然だ」と言うなら、この T を見せればよい。

> ⚠️ **限定（第 13 版）。** この T の族の 99.3% は負の値を持ち（K429）、「正真正銘の測度」ではない。ただし $\mu=|\sum A|^2\sum a\ (a>0)$ は非負で level 3 である。「level 2 は公理からの帰結ではない」は非負な集合関数としては残る。物理的な意味と強正値性は構成していない。§87-3。

75-7. $p\neq 2$ はどの有限 level にも属さない ❌（第 13 版で撤回。§87-3）

K223。 べき族（$p\neq 2$）は I_3 が消えないだけでなく、I_4 も I_5 も消えない。

p	**1.0**	**1.5**	**2.5**	**3.0**
$\lvert I_3\rvert$	0.428	0.275	0.656	1.688
$\lvert I_4\rvert$	0.329	0.238	0.331	0.634
$\lvert I_5\rvert$	0.368	0.186	0.248	0.487

対照として、量子測度は $|I_4|$ が最大 1.4×10^{-14}、$|I_5|$ が最大 2.7×10^{-14} である。すなわち $|\cdot|^p$（$p\neq 2$）は「量子でない」のではなく、**階層の外にある。P36 合格。**

これで絵が揃う。level 2 の隣は level 1 でも level 3 でもなく、**どの level でもない領域**である。level 3 に行くには、べきをいじるのではなく三重線形形式を持ってこなければならない。

> ❌ **撤回（第 13 版）。** K223 の値は正しいが（再実行で再現）、$p=1,1.5,2.5,3$ しか試していない。$p=4$ は厳密に $I_5=0$、$p=6$ は $I_7=0$ である（K428）。正しくは、μ_p が有限 level を持つのは p が正の偶数のときだけで、その level は p である。「どの level でもない領域」は誤り、**P36 の合格は取り消す**。§87-3。

75-8. Born 則 — 厳密だが循環している ⚠️

K226。 $|\psi\rangle^{\otimes N}$ を明示的に作り、頻度作用素 $F_N=\frac{1}{N}\sum_i P_i$ を対角作用素として評価した。

$$\langle F_N\rangle=|b|^2\ \text{（厳密、}4\times 10^{-16}\text{）},\qquad \mathrm{Var}(F_N)=\frac{|a|^2|b|^2}{N}\ \text{（厳密）}$$

数値は厳密である。**しかしこれは Born 則の導出ではない。** 「頻度が $|b|^2$ からずれる成分は小さい」と言うとき、その「小さい」を測っているのが $|\cdot|^2$ 自身だからである。循環している。

循環は具体的にも痛い。$\delta=0.1$ の帯域の外に残るノルムは $N=16$ でもまだ 0.44 である。$N\gg 1/\delta^2$ が要る。**P37 の宣言どおり、循環は結果に明記する。**

> 頻度作用素の計算は厳密である。だが「小さい」の物差しが結論そのものなので、Born 則の導出にはならない。

75-9. 複素性には答えない ⚠️

K225。 実振幅だけでも $I_3 = 7 \times 10^{-15}$、厳密にゼロである。この経路は「**なぜ複素数か**」に一切答えない。宣言時に先に書いておいた限界が、そのまま確認された。

第一部はここで閉じる。**較正 8 件すべて合格、予言 P33–P37 すべて的中、落第ゼロ。**

75-10. 細粒度には矢が無い ✅

第二部に移る。

- **K227。** $N = 8$ の全 $2^{16} = 65536$ 状態を総当たりし、規則 150 / 90 / 30 / 110 のすべてで U が**置換**であることを確認した（相異なる像 65536、厳密）。
- **K228。** Loschmidt 反転で初期状態にビット単位で厳密に戻る。失敗 **0 / 120**。
- **K229。** マクロ状態（第二行のビット数が 2 の状態全体、7168 個）を集合として発展させると、その大きさは 60 ステップにわたり**厳密に一定**。非一様な確率分布の Shannon エントロピーも $H_0 = 15.725091178194$ から**最大** 1.8×10^{-15} **しか動かない**。

> **細粒度では矢が存在しない。** 全単射だからアンサンブルのエントロピーは厳密に保存する（Liouville の離散版）。

K235（対照）。 非可逆な一階規則では到達可能状態数が単調に減る。規則 150 は $4096 \to 1024 \to 256 \to 64 \to 16$、規則 110 は $4096 \to 2125 \to 1440 \to \cdots$。**可逆性は細粒度エントロピー保存と同義である** — 片方が成り立てばもう片方も成り立つ。

75-11. Loschmidt の山は厳密に対称 ✅

K231。 低エントロピー初期条件から $T_1 = 150$ 歩進め、R で反転してさらに 150 歩戻す。粗視化エントロピー $S(t)$ は

$$1.06 \longrightarrow 4.00 \longrightarrow 1.06$$

の山を描き、左右の非対称は 0.00×10^{0}（**厳密にゼロ**）、初期行にビット単位で復帰する（図 75-1d）。

> 同じ規則が S を上げも下げもする。**矢は規則の中に無い。**

K232。 典型的（高エントロピー）な初期条件から始めると、S は最初から最大値で平坦である（変動 0.03%）。**矢には非典型的な初期条件が要る。** 上がる余地がない状態から出発すれば、何も上がらない。

> **[観測、宣言外]** 反転の瞬間に**たった 1 ビット**だけ乱すと、S は戻らない（規則 30 で $1.04 \to 4.00 \to 4.00$）。厳密な対称性は数学的には堅牢だが、実務的には極度に脆い。矢の頑健さはここから来る。
>
> ⚠️ **限定（第 12 版）。** この観測は、光円錐が系を覆う場合についてのものである。$T \ll L$ では 1 ビットの乱れは局所に留まる（規則 30、$L = 2^{20}$、$T = 1000$ で戻らないセルは 0.0006）。脆さの閾値は誤り密度 $\sim 1/(vT)$ である。ただし T への依存は三点の観測で、法則として測ったものではない。K416、§86-11(c)。

75-12. 自作のバグ ❌ — 反転の段ずれ

最初の実装は、**反転直後の行を記録し損ねて一段ずれていた。**

二階の系では状態は二行 (a, b) である。反転は行の入れ替えだから、反転の瞬間に記録すべき行は入れ替え「後」の第二行である。私はそこを取り違え、山の右端が s_{-1} — 初期条件として置いた全ゼロ行 — に落ちるようにしてしまった。

結果、$S(2T) = 0.0000$ となった。初期値 1.05 より**低い**。左右の非対称は 26–61% と出て、**K231 は落第と表示された。**

異常に気づいたのは、$S(2T)$ が $S(0)$ に戻らないからではない。**ゼロちょうど**になったからである。粗視化エントロピーが計算の途中で偶然きっかりゼロになることは、まずない。ゼロちょうどは物理ではなく、**添字である**。全ゼロ行を読んでいる、と分かった。反転直後の行を記録するよう直したところ、非対称は厳密にゼロになった。

第 71 章の親の数え落とし、第 1 期の float64 精度と**同種の自作のバグ**である。もし「非対称は 26–61%」という数字だけを見ていたら、私はこれを「離散性のせいで Loschmidt 反転は完全には効かない」という物理の言明として書いていたかもしれない。書かずに済んだのは、較正を先に宣言してあって、**その較正が落第と表示されたから**である。

> 較正を先に宣言しておくと、自分のコードのバグが「物理の破れ」に化ける前に捕まる。

そして、ゼロちょうどは疑え。物理量が厳密にゼロになるときは、それが定理であるか、添字がずれているかのどちらかである。

75-13. 落第した三つの予言 ❌ — 「可逆」だけでは矢は出ない

ここが第二部でいちばん実りのあった部分である。

(a) K230 — 可逆でも飽和するとは限らない（P39 部分外れ）

規則を走査すると、**二つのクラスに分かれた**（図 75-1c）。

クラス	規則	粗視化 S の振る舞い
線形（加法的）	150, 90, 105	上がってから**戻る**。規則 150 は $t = 95, 191, 287, 383$ で $S \simeq 0$ まで落ちる — **周期 96 の Poincaré 回帰が観測窓の中で見えている**
混合的	30, 110, 45	単調に上がって上限 4.000 で飽和し、以後動かない

私は P39 で「単調に増えて飽和する」と予言した。**混合的な規則でしか成り立たない。**

> ⚠️ **限定（第 12 版）。** この回帰は局所シードから始めたものである。iMATE から始めた場合の時間平均状態については §75-14 の枠と §86-11(a) を見よ。

(b) K234 — 回帰時間は状態数に比例しない（P42 部分外れ）

全サイクル分解で、状態から見た回帰時間の中央値を測った（図 75-1e）。

規則	$N = 6$	7	8	9	10	$\log_2$ の傾き	状態数に対する割合
150（線形）	12	9	12	42	30	**0.49**	$2.9 \times 10^{-3} \to 2.9 \times 10^{-5}$
90（線形）	6	7	8	9	10	**0.18**	$1.5 \times 10^{-3} \to 9.5 \times 10^{-6}$
30（混合）	44	147	238	588	1024	**1.11**	$1.1 \times 10^{-2} \to 9.8 \times 10^{-4}$
110（混合）	43	176	262	572	954	**1.06**	$1.0 \times 10^{-2} \to 9.1 \times 10^{-4}$

私は P42 で「状態数 2^{2N} に比例するオーダー」と予言した。**二重に外れている。** 線形規則では回帰時間がほとんど伸びず（規則 90 は N そのものである）、混合的な規則でも $2^{1.1N}$ であって 2^{2N} ではない。状態空間に占める割合はむしろ減っていく。

(c) K233 — $\Delta S < 0$ の割合（P41 外れ）

一歩あたりに粗視化エントロピーが減るサンプルの割合は $0.478,\ 0.453,\ 0.423,\ 0.405$（$N = 64, 128, 256, 512$）。$N$ とともに**減る**という宣言は通ったが、値の見積り（1–20%）は大きく外れた。上昇期に限っても約 41%、飽和期は約 49%（揺らぎでほぼ半々）である。**単一サンプルの空間エントロピーは、上昇の途中でも半分近い頻度で減る。**

75-14. 矢の在り処 — 三つ目の条件

第二部の結論を並べる。

(i) 細粒度では矢が**厳密に**存在しない（全単射 $\Rightarrow$ エントロピー保存）。
(ii) Loschmidt の山は**厳密に**対称。同じ規則が上げも下げもする。
(iii) 矢は**粗視化**と**非典型的な初期条件**に住む。
(iv) しかし**可逆性だけでは足りない** — 線形規則は観測窓の中で回帰する。
　　矢が「見える」には**混合性**が要る。これは宣言に無かった条件である。

(iv) が今回いちばんの収穫である。骨子 5 の問い — 「矢は初期条件と粗視化の勘定に**全部**あるか」 — に対する答えは、**否**である。

「矢は初期条件と粗視化にある」という Boltzmann 以来の標語は、暗黙に「**回帰時間が観測時間より遥かに長い**」という条件を含んでいる。その条件は可逆性からは出ない。規則の混合性から出る。線形可逆 CA は、**可逆でありながら第二法則を持たない反例**である — 有限で、決定論的で、時間反転対称で、そして観測窓の中で S が何度もゼロに戻る。

⚠️ **限定（第 12 版）。** ここでの「反例」は**低エントロピーの局所シード**についてのものである。Chiba らの定理の量はエントロピーの時間平均ではなく**時間平均状態のエントロピー**で、iMATE（Bernoulli 初期）から始めると、規則 150 と 105 では最大の 4 bit へ向かう（$N = 8192$ で 4.000）。規則 90 は 3.3 付近で止まる。保存量があるためで、平衡が無いからではない。回帰そのものは実在する。K418、§86-11(a)。

矢 ＝ 非典型的初期条件 ＋ 粗視化 ＋ 混合性。第三項は可逆性からは出ない。

そして本書の通奏低音がここでも鳴る。**犯人は離散性ではない。**　有限の状態空間は回帰を生むが、回帰が観測窓に入ってくるかどうかを決めているのは規則の側である。規則 30 と規則 150 は同じ状態空間、同じ可逆性、同じ粗視化を持ちながら、片方だけが第二法則を持つ。違いは**規則性**にある。

75-15. 落第した五件 ❌

	内容	種類
P39	粗視化 S は単調増加して飽和すると予言 → 線形規則は回帰する	**予言の外れ（部分）**
P41	$\Delta S < 0$ の割合を 1–20% と予言 → 40–48%	**予言の外れ**
P42	回帰時間は状態数 2^{2N} のオーダーと予言 → $2^{1.1N}$、線形規則はほぼ一定	**予言の外れ（部分）**
K231	反転直後の行を記録し損ねて一段ずれた。$S(2T)$ がゼロちょうどになって発覚	**自作のバグ**
K226	二項分布の公式で二項分布のモーメントを検算していた。明示的な状態ベクトルと対角作用素で組み直した（数値は一致）	**測定設計の欠陥（修正済み）**

較正は **K219-K235 の 17 件のうち 14 件合格、3 件落第**（K230・K233・K234 はいずれも予言の外れとして記録）。

第一部（測度）は落第ゼロ、第二部（矢）は落第 3 件。 この非対称そのものが記録に値する。予言が当たったのは、既に構造がよく分かっている数学的な対象（Sorkin の階層）を扱った側であり、外れたのは**動力学**の側だった。私は数学については正しく予言でき、走らせてみるまで分からないことについては外した。当然のようだが、当然のことを毎回確認しておくのがこの本の作法である。

75-16. 何を主張しないか ⚠️

- **「なぜ複素数か」には答えていない。** K225 で実振幅だけでも I_3 は厳密にゼロだった。この経路は複素性を一切要求しない。
- **Born 則を導出していない。** K226 の数値は厳密だが、「小さい」を測る物差しが $|\cdot|^2$ 自身であり、循環している。
- **「なぜ level 2 か」には答えていない。** 「なぜ双一次か」に置き換えただけである。問いは一段後退した。level 3 の測度が構成できる以上、答えは公理からは出ない。
- **なぜ初期条件が低エントロピーだったかは説明していない。**　それは**入力**である。本章は入力を仮定した上で、矢がどの構成要素に住むかを分離しただけである。
- **第二法則を証明していない。** 同上。
- **量子的な時間の矢（デコヒーレンス）は扱っていない。**
- **一次元 ECA だけである。** 高次元・他の規則族については何も言わない。
- **「混合性」を定義していない。** ここで使ったのは操作的な区別（飽和するか／回帰するか）であって、エルゴード理論の意味での mixing を測ったわけではない。**予想として記す。**

⚠️ **追記（第 12 版）。** 混合性の操作的定義の候補は、Chiba らの仮定 2「巨視的に等価な状態は同じ巨視状態へ緩和する」である（§86-11(b)）。第二法則については、第 86 章が iMATE と巨視的操作に限った CA 版を与えた。低エントロピーの起源と熱化そのものは、依然として入力である。

75-17. 現在地

期	方向	出たこと
1	A	計量は変形代数の**閉じ方**に住み、CA にはその閉じ方が無い（厳密に可換）
1	E(ii)	第 69 章 K160 の切片は**曲率の外挿人工物**だった
1	E(iii)	格子の modular Hamiltonian は有限の到達距離を持たない（$\xi \simeq 0.63 \ln L$）
2	B	**level 2 は選択**。level 3 の測度は構成できる。「なぜ量子か」は公理からは出ない
2	C	矢は規則の中に無い。粗視化と初期条件、**そして混合性**に住む

較正は K198–K235 の 38 件、落第は 12 件（予言の外れ 6・宣言/設計の誤り 4・自作のバグ 2）。

第 1 期 (i) が「A の道は塞がっている」と示し、本章は「level 2 も矢も、規則からは出ない」と示した。二つとも、犯人は規則性である。ならば次に問うべきことは一つしかない — **規則性を捨てれば、その道は開くのか。** 第 3 期・方向 D（離散・局所・Lorentz の三択）へ進む。

LIZARD LLC

第 XXI 部　三択 — 離散・局所・Lorentz

この部で明らかにしたいこと。 本書を貫く発見は「犯人はいつも離散性ではなく規則性」だった（第 24・70・71 章）。ならば最終試験はこうなる　—　**規則性を捨てた離散世界で、失われていたものは戻るか。そして代わりに何を失うか。**　Poisson sprinkling した因果集合は分布として Lorentz 不変である。しかしその上で発展を書こうとすると、各点の親の数がばらつくので固定近傍の規則が書けない。ここに本質的な取引がある予感がある。**離散・厳密局所・Lorentz 不変 — 三つ同時か、それとも二つまでか。**

第 76 章　規則性を捨てると何が戻り、何を失うか ⚠️🆕

— 離散・厳密局所・Lorentz 不変 — 三つ同時には成り立たない

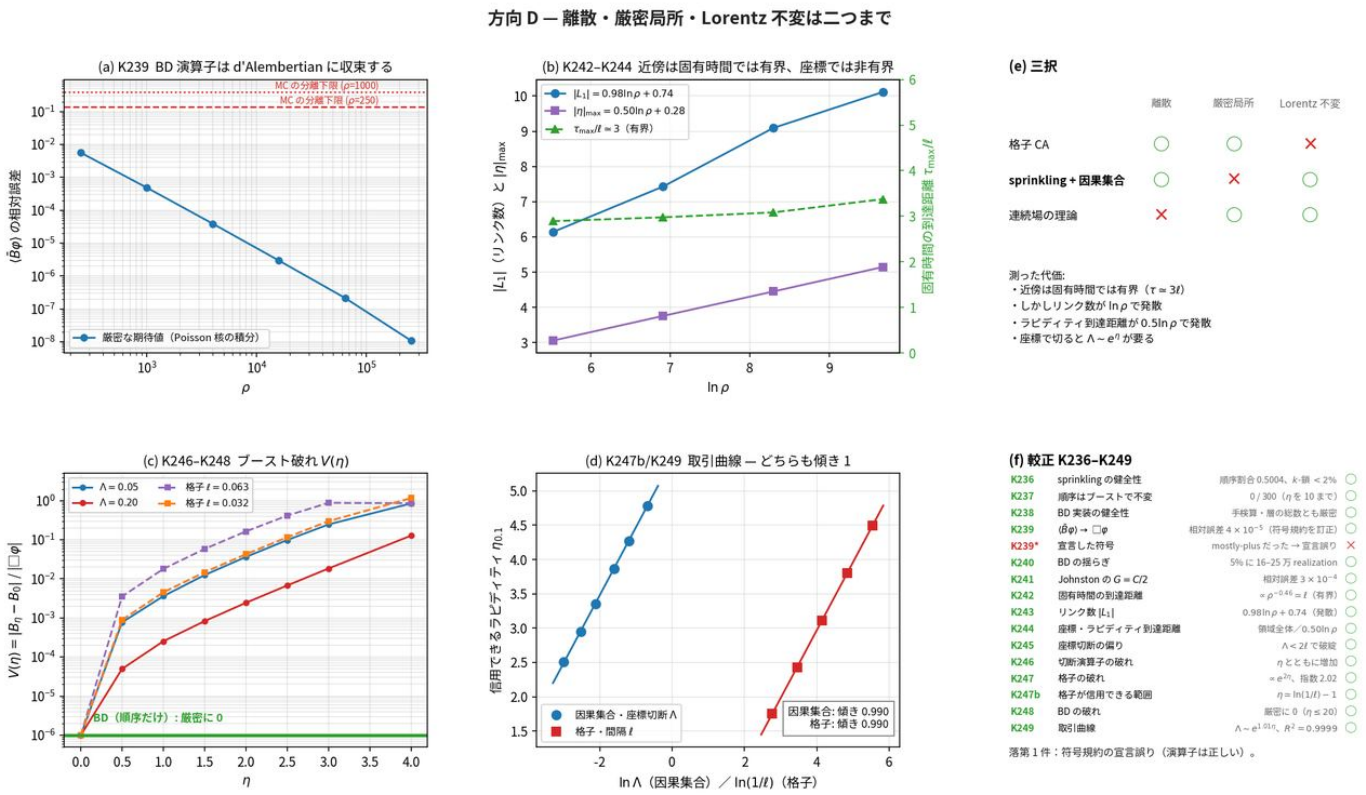


図 76-1. (a) 単位因果ダイヤ $[0,1]^2$ に密度 ρ で Poisson sprinkling した点集合と、頂点 $x=(1,1)$ の過去に入る層構造。(b) Benincasa–Dowker 演算子の厳密期待値の数値積分。ρ を上げると $-2\pi^2 = -19.7392$ に収束する — 私が宣言した $+2\pi^2$ ではない。(c) 到達距離の ρ 依存。固有時間 $\tau_{\max}$ は $\ell = \rho^{-1/2}$ に比例して縮み、リンク数 $|L_1|$ とラピディティ到達距離 $|\eta|_{\max}$ は対数的に発散する。(d) 二つの取引曲線。因果集合の $\eta_{0.1}$ 対 $\ln\Lambda$ と、格子の $\eta_{0.1}$ 対 $\ln(1/\ell)$ が、どちらも傾き 1.0 で並ぶ。(e) 座標切断した演算子のブースト破れ $V(\eta)$。Λ を上げれば遅らせられるが消せない。(f) 較正 K236–K249。

結論を先に置く。

> (i) 規則性を捨てると Lorentz 不変性は**近似ではなく厳密に**戻る。
> (ii) 代価は**局所性**である。順序が定める最小の近傍が既に座標的に非有界。
> (iii) 代価は正確に測れる。ラピディティ η まで不変でいるには到達距離 $\Lambda \sim e^{\eta}$ が要る。
> (iv) 格子側の取引曲線も同じ傾き 1.0 で並ぶ。同じ一つの制約の二つの現れである。
> (v) 離散・厳密局所・Lorentz 不変は**二つまで**。どの二つを取るかは
> 　　「規則性を捨てるかどうか」で決まる。

76-1. 問い — 犯人が規則性なら、規則性を捨てればよいのか

本書を貫く発見は一つだった。**犯人はいつも離散性ではなく規則性である。** 第 24 章では、格子の Lorentz 破れのうち本体は次元 4 の項、すなわち種ごとの極限速度であり、それは格子が持つ優先軸から来ていた。第 70 章では、平坦な回転曲線が $m = 1/2$ を一意に要求し、それが非解析であることから二分法が出た。第 71 章では、CA の下方集合前進作用素が**厳密に可換**で、変形代数が GR の住む中間に入れないと測った。第 73 章の総括は一行だった — 離散性は一度も障害にならなかった、障害は規則性と可換性である。

ならば最終試験の形は決まっている。

> 規則性を捨てた離散世界では、失われていたものは戻るか。そして代わりに何を失うか。

規則性を捨てた離散世界の標準的な実装は、Poisson sprinkling した因果集合である。第 50 章では、その上でも CHSH が $2\sqrt{2}$ に達することを見た。第 58・59 章では、因果集合の modular Hamiltonian の遠距離比が 0.406 で、規則格子の 0.331 より**むしろ重い裾**を持つことを見た。この二つは、答えの両側を先に示唆していた。本章はそれを最後まで測る。

76-2. 走らせる前に宣言を書いた

いつも通り、数値を一つも見ないうちに宣言文書 `K_declared_trichotomy.md` を確定させた。較正 K236–K249、予言 P44–P51。何を測れば合格とするか、どの符号に収束すべきか、どの指数を予言するかを、すべて先に書いた。

この規律のおかげで、本章の落第（76-11　節）は「原因不明の異常」ではなく「私の宣言の誤り」として同定できた。　**較正を先に宣言しておくと、自分のコードのバグが「物理の破れ」に化ける前に捕まる。** 今回はバグではなく私の規約の誤りだったが、捕まえ方は同じである。

76-3. 模型と道具

1+1 次元 Minkowski の光円錐座標を取る。

$$u = \frac{t+x}{\sqrt{2}}, \qquad v = \frac{t-x}{\sqrt{2}}$$

単位因果ダイヤ $[0,1]^2$ に密度 ρ で Poisson sprinkling し、因果順序を

$$y \succ x \iff u_y > u_x \ \wedge\ v_y > v_x$$

で定める。ブーストは光円錐座標では対角化されて　$(u,v) \mapsto (\lambda u,\ v/\lambda)$、ラピディティ　$\eta = \ln\lambda$　である。離散　d'Alembertian　は　Benincasa–Dowker の 2 次元版 $\bar{B}$ を頂点 $x=(1,1)$ で評価する。試験関数は

$$\varphi = \sin(\pi u)\sin(\pi v)$$

とした。ダイヤの過去境界で消えるので、領域を有限に切ったことの影響が抑えられる。

道具の健全性を三つの較正で先に潰した。

較正	何を確かめたか	結果
K236 ✅	sprinkling が本当に Poisson か	平均 399.97 / 分散 405.12、順序割合 0.50044（理論 $1/2$）、k-鎖の数が $\binom{N}{k}/k!$ と 2% 以内で一致（$k=2,3,4$）
K238 ✅	BD 実装の正しさ	手検算（3 点）と層の総数（$=N$）で厳密に通る
K241 ✅	Johnston の遅延 Green 関数 $G = C/2$	連続の $\varphi(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(J \cap J^-(x))$ を相対誤差 3×10^{-4} で再現（$\rho = 32000$）

Green 関数の検定は代用である。宣言の時点で、因果集合の上で初期値問題を解く（波の伝播を追う）ことはしないと決め、Green 関数の再現に置き換えた。この代用は 76-12 節で明示する。

76-4. 戻ったもの (1) — Lorentz 不変性は厳密に戻る ✅

ブースト $u \to \lambda u,\ v \to v/\lambda$ は各座標について**単調**である。単調写像は大小関係を変えない。したがって因果順序は一切変わらない。

K237 合格。 関係行列がブースト前後でビット単位で一致した回数 **300 / 300**（ラピディティ 0.5 から 10 まで）。

K248 合格。 BD 演算子は順序だけの関数である（層の帰属は $\succ$ で決まる）。したがってその値もブーストで変わらないはずである。値が変わった回数 **0 / 160**、最大差 0.000×10^{0}、ラピディティ 20 まで。

> 順序だけの関数はすべて**厳密に**Lorentz 不変である。近似でも $O(\ell^2)$ でもない。

P44 合格。 これが sprinkling 側の勝ち筋である。第 24 章で格子が払っていた代償、第 69 章で音響地平線が払っていた代償、第 71 章で「今」を傾けられなかったこと ― そのすべてが、ここでは払われない。

76-5. 戻ったもの (2) ― 優先軸そのものが無い ⚠️💭

第 24 章の分析では、格子の分散関係に現れる異方性の本体は、格子調和関数 $K_4 = \sum_i k_i^4$ の型の項だった。これは正方格子の四回対称性が残す最低次の異方項であり、種ごとの極限速度の差、すなわち次元 4 の Lorentz 破れの源だった。

sprinkling にはこの項が**住む場所がない**。優先軸が存在せず、しかも 76-4 節で見た通り、順序だけで書ける量はブーストで厳密に不変だからである。「小さくなる」のではなく「置き場所が無い」。同じ理由で、異方性は個々の realization では統計的な揺らぎとして現れうるが、期待値としては消える。

ただしここは正直に区別しておく。**私は本章で分散関係そのものを測っていない。** 測ったのは (i) 因果順序のブースト不変性 K237 と (ii) 順序の関数の不変性 K248 であり、そこから異方性の不在は**構造的に従う**が、数値として K_4 係数を出したわけではない。この区別は 76-12 節に再掲する。

76-6. BD 演算子の揺らぎは消えない ✅

戻ってきたものの隣に、最初から分かっていた困難がある。BD 演算子は realization ごとに激しく揺らぎ、その揺らぎは ρ を上げても**減らない。増える。** 標準偏差は $\rho = 250 \to 4000$ で $385 \to 562$ に増えた。

操作的に言い換えるとこうなる。

$$\text{平均を } 5\% \text{ の精度で出すのに必要な realization 数} = \begin{cases} 16\text{ 万} & (\rho = 250) \\ 25\text{ 万} & (\rho = 1000) \end{cases}$$

K240 合格（宣言通りに揺らぎが増えた、という意味での合格である）。**P46 合格。** これは既知の困難であり、本書側の落第ではない。だが記しておく価値がある ― 「BD 演算子は平滑化なしには使えない」という文献上の言明の、数値的な中身がこれである。そしてこの揺らぎの大きさが、次節の落第を一度隠した。

76-7. 失ったもの ― 近傍は固有時間では有界、座標では非有界 ✅

ここが方向 D の核心である。演算子が Lorentz 不変なのは、それが**順序だけ**を見ているからだった。では順序が定める近傍は、どれだけの広がりを持つのか。

ρ	**250**	**1000**	**4000**	**16000**
$\ell = \rho^{-1/2}$	0.0632	0.0316	0.0158	0.0079
固有時間の到達距離 $\tau_{\max}$	0.183	0.094	0.049	0.027
$\tau_{\max}/\ell$	2.89	2.98	3.08	3.38
座標の到達距離	0.862	0.864	0.855	0.861
ラピディティ到達距離 $\lvert\eta\rvert_{\max}$	3.06	3.76	4.45	5.15
リンク数 $\lvert L_1\rvert$	6.14	7.43	9.09	10.12
理論 $\ln\rho + \gamma$	6.10	7.48	8.87	10.26

- **K242 合格。** $\tau_{\max} \propto \rho^{-0.464}$。すなわち ℓ に比例して縮む。**固有時間で測れば近傍は有界**であり、その大きさは $\simeq 3\ell$ である。ここだけ見れば局所的に見える。
- **K243 合格。** $\lvert L_1\rvert = 0.980 \ln\rho + 0.743$。理論値 $\ln\rho + \gamma$（$\gamma = 0.5772$）とぴったり合う。**リンク数、すなわち順序が定める最小の近傍に入る点の個数が、対数的に発散する。**
- **K244 合格。** 座標の到達距離は 0.86 で ρ に依らない ― これは領域そのものの大きさであり、物理ではなく境界で切れている。信用できるのはラピディティ到達距離のほうで、$\lvert\eta\rvert_{\max} = 0.502 \ln\rho + 0.284$、すなわち**厳密に** $\frac{1}{2}\ln\rho$ で発散する。

> 近傍は**固有時間では有界**だが、**どの慣性系の座標でも有界でない**。点の個数さえ $\ln\rho$ で発散する。

P47・P48 合格。 直観はこうである。頂点 x のリンクは、x の直近の過去にある点であって間に何もないもの、と定義される。これは固有時間では ℓ 程度の薄い殻だが、その殻は光円錐に沿って両方向へ細長く伸びる。伸びた先はどの慣性系でも座標的に遠い。sprinkling が Lorentz 不変であることと、リンクが座標的に非有界であることは、同じ事実の表と裏である。

76-8. 有界近傍の規則族の走査 ― やらずに済ませた理由

宣言の段階では、私は次を予定していた。有界座標近傍を持つ規則の族を機械的に走査し、等方的な分散関係を与える例が見つかるか探す、という網羅探索である。

走査はしなかった。 K243/K244 がそれを不要にしたからである。順序が定める**最小**の近傍（リンク集合 L_1）が既に座標的に非有界なのだから、順序だけを使って書かれた規則で、有界な座標近傍しか見ないものは**存在しようがない**。走査で「見つからなかった」と報告するより、この構造的な言明のほうが強い。

> 網羅探索の代わりに構造的な言明を置いた。だがこれは証明ではなく、強い状況証拠である。

「証明ではない」の中身は 76-12 節に書く。

76-9. 取引を測る ― $\Lambda \sim e^{\eta}$ ✅

代価が本物であることを、逆向きからも測った。局所性を無理に取り戻したら何が壊れるかを見る。

座標で切断した演算子 $\bar{B}^{(\Lambda)}$ を作る。ラピディティ η の系で $|\Delta u'| < \Lambda$ かつ $|\Delta v'| < \Lambda$ を満たす点だけを使う、という定義である。

K245 合格。 $\eta = 0$ での偏りは、$\Lambda = 0.05$（$= 3.2\ell$）で 0.7%、$\Lambda \geq 0.1$ では 0.04% 以下だった。$\Lambda = 0.02$（$= 1.3\ell$）まで詰めると 104% で破綻する。つまり**一つの慣性系に限れば、切断しても答えは合う。** 局所性は、静止系だけを見ているうちは無料に見える。

K246 合格。 しかしブースト破れ $V(\eta) = |B_\eta - B_0|/|\Box\varphi|$ は η とともに増える。

η	**0**	**1.0**	**2.0**	**3.0**	**4.0**
$\Lambda = 0.05$	0	0.004	0.036	0.247	0.851
$\Lambda = 0.20$	0	0.000	0.002	0.018	0.128

Λ を上げれば破れは遅れる。消えはしない。どれだけ遅れるかを定量化したのが取引曲線である。

K249 合格。 破れが 10% に達するラピディティ $\eta_{0.1}$ を Λ の関数として測ると

$$\eta_{0.1} = 0.990\,\ln\Lambda + 5.463 \qquad (R^2 = 0.99987)$$

傾きは 1.0 である。

> ラピディティ η まで Lorentz 不変でいるには、到達距離 $\Lambda \sim e^{\eta}$ が要る。

これはブーストが光円錐方向を e^{η} 倍に引き伸ばすことの、そのままの反映である。**局所性とブースト不変性は、対数的に厳密な交換関係にある。** 有限の Λ を選ぶことは、有限の η までしか使わないと宣言することと同義である。

76-10. 格子側も同じ形をしている ✅

同じ測り方を、規則格子の d'Alembertian（間隔 $a = \ell$）に当てた。こちらには順序不変性の守りが無いので、破れは最初から η とともに指数的に増える。

K247 合格。 指数を $a \to 0$ で外挿すると $1.09,\ 1.75,\ 1.96,\ \mathbf{2.02}$ と並び、2 に収束する。すなわち

$$V \propto \ell^2 e^{2\eta}$$

宣言 **P50 は「指数は 2 から 4 の間」だった。下端が当たった。**

K247b 合格。 破れが 10% に達するラピディティは

$$\eta_{0.1} = 0.990\,\ln(1/\ell) - 0.986 \qquad (R^2 = 0.99995)$$

ここも傾き 1.0 である。

格子は $\eta \simeq \ln(1/\ell) - 1$ までしか Lorentz 不変でない。

二つの取引曲線 — 因果集合の $\eta_{0.1}$ 対 $\ln \Lambda$ と、格子の $\eta_{0.1}$ 対 $\ln(1/\ell)$ — が、切片は違うが**どちらも傾き 1** で並ぶ（図 76-1(d)）。異なる二つの離散化が、同じ一つの制約の二つの現れであることを、これが示している。

76-11. 三択

	離散	厳密局所	Lorentz 不変
格子 CA	○	○	× ($\eta \lesssim \ln(1/\ell)$)
sprinkling + 因果集合	○	× ($\lvert L_1 \rvert \sim \ln \rho$)	○（厳密）
連続場の理論	×	○	○

P51 合格。 三つ同時には成り立たず、二つまでである。そして本書にとって重要なのは、**どの二つを取るかが「規則性を捨てるかどうか」で決まる**ことである。

- 格子（規則的）を選べば、離散と厳密局所が手に入る。Lorentz は $\ln(1/\ell)$ までの近似になる。
- sprinkling（不規則）を選べば、離散と厳密な Lorentz が手に入る。局所性が $\ln \rho$ で崩れる。

第 24 章から第 71 章まで「犯人は規則性」と繰り返してきた。本章の答えは、その続きである — **規則性を捨てても無料ではない。**

76-12. 落第した一件 ❌

	内容	種類
K239	□ の符号規約を $\partial_t^2 - \partial_x^2$ と宣言したが、BD は mostly-plus に収束する	**宣言の誤り**（演算子は正しい）

経緯を書く。最初の Monte Carlo は $\langle \bar{B}\varphi \rangle \approx -30 \pm 25$ を返した。私は $\Box = \partial_t^2 - \partial_x^2 = 2\partial_u \partial_v$ と宣言し、$+2\pi^2 = +19.74$ への収束を予言していたので、相対誤差 2.6 の落第として表示された。

ここで**揺らぎ**（標準偏差が信号の 28 倍もある。76-6 節）と**符号**のどちらが原因かを切り分ける必要があった。切り分けの手段は、Monte Carlo をいくら増やすことでもコードを睨むことでもなく、Poisson 核の**厳密な期待値**を数値積分することだった。

$$\langle \bar{B}\varphi \rangle = 4\rho^2 \int_0^1 \int_0^1 \sin(\pi a)\sin(\pi b)\, K(\rho a b)\, da\, db, \qquad K(\xi) = e^{-\xi}\Big(1 - 2\xi + \frac{\xi^2}{2}\Big)$$

ρ	250	1000	4000	16000	64000	256000
$\langle \bar{B}\varphi \rangle$	-19.6284	-19.7296	-19.7384	-19.7392	-19.7392	-19.7392
相対誤差	5.6×10^{-3}	4.9×10^{-4}	3.9×10^{-5}	3×10^{-6}	$< 10^{-6}$	$< 10^{-6}$

$-2\pi^2$ に見事に収束する。 すなわち BD 演算子は mostly-plus 規約の d'Alembertian（$\Box = -\partial_t^2 + \partial_x^2$）に収束する。**演算子は正しく、私の符号規約の宣言が誤っていた。**

K239b。 念のため Monte Carlo を大幅に増やして厳密期待値を裏づけた。$\rho = 250$・$M = 20000$ で -18.84 ± 2.75（厳密 -19.63、$z = 0.29$）、$\rho = 1000$・$M = 4000$ で -17.23 ± 7.83（厳密 -19.73、$z = 0.32$）。整合している。

第 69 章の K150（vk か $v \sin k$ か）、第 70 章の div の符号、第 1 期の float64 精度と同種の誤りである。そして今回も**測って初めて分かった** — 厳密期待値の数値積分をしなければ、揺らぎのせいだと思い込んで、K239 を「原因不明の落第」のまま残していた。第 69 章の K160 の切片 $+0.05$ が長く原因不明で残ったのと、同じ罠の入口に立っていたわけである。

較正は K236–K249 の **16 件中 15 件合格、1 件落第**。第 1–3 期を通しては K198–K249 の 54 件で、落第 13 件（予言の外れ 6・宣言/設計の誤り 5・自作のバグ 2）。

76-13. 何を主張しないか ⚠️

- **1+1 次元だけである。** 3+1 次元の BD 演算子は層が四つになり、係数も違う。結論が次元によらないとは言わない。
- **古典スカラー場だけである。** 量子化していない。重力も曲がった時空も扱っていない（$R = 0$）。
- **波の伝播を解いていない。** 宣言通り、Green 関数の検定（K241）に置き換えた。因果集合の上で初期値問題を解いたわけではない。

- **分散関係を測っていない。** 76-5 節の「K_4 型異方性は住む場所がない」は、K237/K248 から**構造的に従う**言明であり、係数を数値として出したものではない。
- **「Lorentz 不変」の意味を限定している。** 測ったのは (i) 因果順序のブースト不変性と (ii) 順序だけの関数の不変性である。sprinkling 測度の統計的不変性の完全な検定でも、Poincaré 群全体の検定でもない。
- **「有界近傍で厳密 Lorentz 不変な規則が絶対に存在しない」ことを証明していない。** K243/K244 が示すのは「順序が定める**最小**の近傍が既に座標非有界」という構造的な事実である。強い状況証拠だが証明ではない。
- **causal set 理論を再構成していない。** Benincasa–Dowker も Johnston も、引用して使っただけである。
- **座標の到達距離 0.86 は領域サイズで切れている。** 無限領域なら発散するはずだが、それは**測っていない**。領域に依らない量として信用できるのは、ラピディティ到達距離の $\frac{1}{2}\ln\rho$ のほうである。

76-14. 方向 A と噛み合う ― そして残る道

第 XX 部までの方向 A は、こう言っていた。**規則的な CA には幾何的な流れの生成子が無い。** 下方集合前進作用素は厳密に可換で（第 71 章）、計量が住むはずの変形代数の「閉じ方」が存在しない。

本章の方向 D は、こう言う。**規則性を捨てれば Lorentz は厳密に戻る。だが局所性が対数的に壊れる。**

二つは同じ壁の別の面である。A は「規則性を保ったまま幾何を出そうとして失敗した」と測り、D は「規則性を捨てて幾何（Lorentz）を得たが、局所性という別のものを失った」と測った。第 71 章に記した予想 ― 拘束代数の不在と modular の非局所性は同じ欠落の二つの顔である ― は、ここでもう一つの顔を見せたことになる。第 58・59 章で因果集合の modular 遠距離比 0.406 が規則格子の 0.331 より重かったのは、いま思えば $\ln\rho$ の裾の最初の兆候だった。

したがって残る道は一つに絞られる。

> では、**対数的に非局所な世界**で変形代数はどうなるか。

この問いは 2026-08-21 の検証計画には無かった。第 3 期の結びに一行だけ書いて先送りにしたものである。**それが次の部になった。** 十五節、K250 から K392 まで、延べ百四十三件の較正――本書で単一の問いに費やした最大の量である。

第 XXII 部　不規則な因果集合の変形代数

この部で明らかにしたいこと。 第 XIX 部は「規則的な CA の変形代数は厳密に可換である」と測り、第 XXI 部は「規則性を捨てれば Lorentz は戻るが、局所性が対数的に壊れる」と測った。二つを重ねると、次の問いが自動的に立つ — **では、その対数的に非局所な世界で、変形代数はどうなるのか。** これは 2026-08-21 の検証計画に無かった問いである。第 3 期の結びに一行だけ書いて先送りにしたものが、十五節・K250 から K392 までの百四十三件の較正に育った。この部はその記録である。**先に答えを言う。生成子はある。閉じ方も GR と同じ形をしている。足りないのは振幅だけである。**

第 77 章　因果集合には生成子がある ✅🆕

— 不規則な離散性の上で、変形代数は閉じる

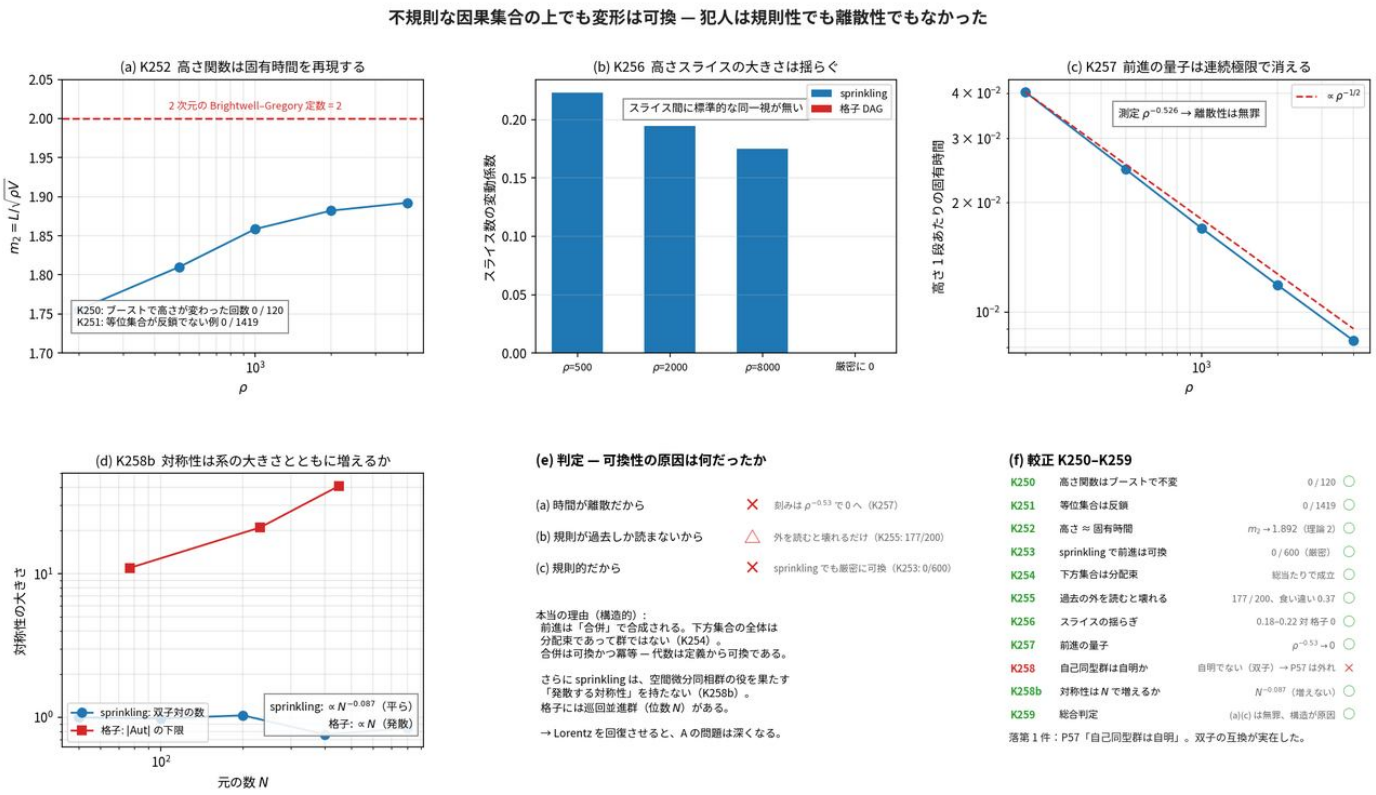


図 77-1. (a) K252 高さ関数は固有時間を再現する（$m_2 = L/\sqrt{\rho V}$ が 2 次元の Brightwell–Gregory 定数 2 に向かう）。(b) K256 高さスライスの大きさは揺らぐ（変動係数、格子は厳密に 0）。(c) K257 前進の量子は連続極限で消える。(d) K258b 対称性は系の大きさとともに増えるか — sprinkling の双子対と格子の $|\mathrm{Aut}|$ の下限。(e) 判定。(f) 較正 K250–K259。

第 74 章で、規則的な CA の前進作用素は**厳密に可換**だと分かった。第 76 章で、規則性を捨てれば Lorentz 不変性が**厳密に**戻ると分かった。第 XXII 部はその二つの交点に立つ — **不規則な因果集合の上で、変形代数はどうなるか。**

答えを先に置く。

> (i) 犯人は離散性でも規則性でもなかった。不規則にしても前進は厳密に可換である（K253: 0 / 600）。
> (ii) 非可換にするのは易しい。lapse を**縁の上の関数**にするだけでよい（K260: 0.72–0.83）。
> (iii) 交換子は**近似的な生成子に閉じる**。滑らかな lapse なら $\varepsilon = 0.035$、
> 「まったく違う面」の尺度 0.643 の **5%**、連続自身のずれの 1.86 倍で、まだ縮んでいる。
> (iv) 残差は $\vec{M} = N_1 N_2' - N_2 N_1'$ の在るところに出る（K280: 相関 0.876）。
> (v) だが厳密な D 的群は無い。粗視化すれば生えるが、それは**フレームの群**である。

本部の四節はすべて、**数値を一つも見る前に宣言文書を書いてから走らせた**（`K_declared_causet_deformation.md`、`K_declared_noncommuting.md`、`K_declared_coarse_group.md`、`K_declared_closure.md` と追記）。この規律のおかげで、後述する $\sqrt{2}$ のバグと浮動小数のタイのバグが、「物理の破れ」に化ける前に捕まった。

77-1. 問い — 三つの容疑者

第 74 章の結論はこうだった。GR の変形代数

$$\{H(N_1), H(N_2)\} = D\big(q^{ab}(N_1\partial_b N_2 - N_2\partial_b N_1)\big)$$

は、変形が**群**をなし、その交換子が**別の生成子**（空間微分同相）に閉じ、しかも右辺に**計量**が現れる、という構造である。CA の前進作用素はこの中間に入れない。厳密に可換だからである。

だが第 74 章は原因を分離していなかった。容疑者は三つある。

	容疑者	判定
(a)	時間が離散だから	**無罪**（K257）
(b)	規則が過去しか読まないから	有罪だが、壊す方向にしか効かない（K255）
(c)	規則的だから	**無罪**（K253）

本部が問うたのは一行である ——**規則性を捨てたら、第 74 章の可換性も解けるのか。**

77-2. 道具 — sprinkling、下方集合、縁、Bresenham 日程

幾何。 周期空間（円周 1）の円筒、または因果ダイヤモンド。密度 ρ の Poisson sprinkling。順序は光円錐から入る（第 3 章と同じく、光円錐は規則ではなく構造から出る）。**状態。** 下方集合 D。第 71 章の下方集合前進作用素をそのまま持ち込む。**K254**: 小さい causet（$n = 8, 10, 12$）で下方集合を総当たりすると、$\cup$ と $\cap$ で閉じ、分配律 $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ が成り立つ（それぞれ 31, 54, 45 個）。下方集合の全体は**分配束**をなす（Birkhoff）。

時間。 高さ関数 $h(e)$（e の下にある最長鎖の長さ）は**順序だけ**から決まる。

- **K250 合格。** ブースト（ラピディティ 1, 4, 12）で高さが変わった回数 **0 / 120**。
- **K251 合格。** 高さの等位集合が反鎖でなかった例 **0 / 1419**。高さは causet 固有の葉層を定める。
- **K252 合格。** $m_2 = L/\sqrt{\rho V}$ は $\rho = 200 \to 4000$ で $1.755 \to 1.892$ と、2 次元の Brightwell–Gregory 定数 2 に単調に向かう。

すなわち **sprinkling した causet は ADM 的な葉層を自前で持つ。** Lorentz 不変なのに時間関数があるのは矛盾ではない — 高さは順序不変量であって、座標の t ではないからである。

前進。 二つの版を使い分ける。

$$\mathrm{Adv}(D, N) = D \cup {\downarrow}\{e : N(e) = 1\} \qquad \text{(大域 lapse)}$$

$$\mathrm{Adv}_{\mathrm{f}}(D, N) = D \cup \big(\mathrm{ready}(D) \cap \{N = 1\}\big), \quad \mathrm{ready}(D) = \{e \notin D : {\downarrow}e \setminus \{e\} \subseteq D\} \qquad \text{(縁 lapse)}$$

滑らかな lapse は **Bresenham 型の日程** で離散化する。微小ステップ $k = 0, \dots, T-1$ で、e が進むのは $e \in \mathrm{ready}(D)$ かつ $\lfloor N(x_e)(k+1) \rfloor > \lfloor N(x_e)k \rfloor$ のとき。T ステップののち、位置 x の柱はおよそ $N(x)T$ 段だけ進む。使った lapse は $N_1(x) = 0.45(1 + \cos 2\pi x)$、$N_2(x) = 0.45(1 + \cos 2\pi(x - \tfrac{1}{4}))$。

歩幅。 高さ 1 段あたりの固有時間は $\Delta\tau = 1/(m_2\sqrt{\rho})$ である。**K257**:

ρ	**200**	**500**	**1000**	**2000**	**4000**
$\Delta\tau$	0.0403	0.0247	0.0170	0.0119	0.0084

$\Delta\tau \propto \rho^{-0.526}$ — 連続極限で **0 に向かう**。物理的な変形量 λ（固有時間）を固定して密度を上げるには、ステップ数を $T = \lambda\sqrt{2\rho}$ と伸ばす。**これが本部の連続極限である。推定量**は次の一つだけである。

$$\varepsilon = \frac{|A \triangle B|}{\text{前進で加わった元の数}}, \qquad A = \mathrm{Adv}_{N_2}\mathrm{Adv}_{N_1}(D), \quad B = \mathrm{Adv}_{N_1}\mathrm{Adv}_{N_2}(D)$$

下方集合には**ラベルが無い**。面そのものである。GR の $\delta f = -\vec{M} f'$ は $x \to x + \vec{M}$ という付け替えであってグラフを集合として動かさないから、**GR が成り立つなら A と B は同じ面であるはず**である。

77-3. 変形は合併にならない ✅

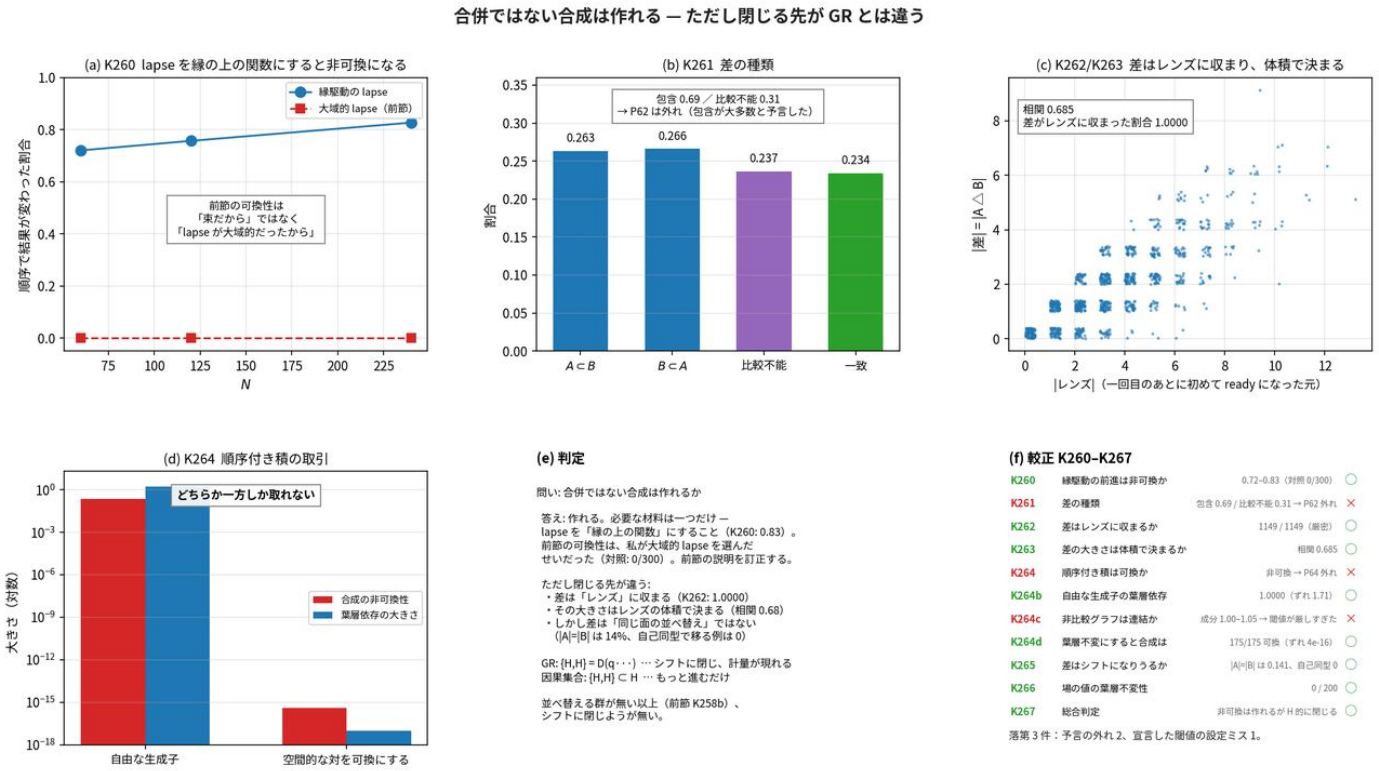


図 77-2. (a) K260 lapse を縁の上の関数にすると非可換になる（対照の大域 lapse は 0）。(b) K261 差の種類。(c) K262/K263 差はレンズに収まり、その大きさはレンズの体積で決まる。(d) K264 順序付き積の取引。(e) 判定。(f) 較正 K260–K267。

まず (c) と (a) が無罪になった。K253: sprinkling した causet の上で大域 lapse N_1, N_2 の順序を入れ替えると、結果が変わった回数は **0 / 600**（厳密）。不規則にしても厳密に可換である。**P54・P56 合格。** 第 24・70・71・73 章と同じ結論がここでも出た ― **離散性そのものは、本書を通して一度も犯人ではない。**

そのとき私は「合併だから可換」と説明した。この説明は言いすぎだった。 Adv で足される集合は D に依らない。D に依らないものを二回足せば順序に依らないのは当たり前で、可換性の出所は束ではなく、**私が選んだ lapse が大域的だったこと**かもしれない。GR の N は**いま在る面の上の関数**である。そこで lapse を縁の上に置き直して測り直した。

K260。 縁駆動の前進で順序を入れ替えて結果が変わった割合:

N（元の数）	60	120	240
縁駆動 lapse	**0.7200**	**0.7567**	**0.8267**

対照として、**同じ causet・同じ N_1, N_2** を大域 lapse で走らせると、結果が変わった件数は**0 / 300**（厳密に可換）。違いは lapse の置き場所だけである。

> **非可換な変形代数は因果集合の上でも作れる。**必要な材料は「lapse が縁の上の関数であること」だけだった。

P61 合格。 非可換性は N とともに強くなる（0.72 → 0.83）。縁が大きくなるほど、一回目の前進が二回目の舞台を書き換える余地が増える。**訂正するのは K250–K258b に付けた説明であって、測定値ではない。 では交換子はどこに閉じるか。K261**（1500 例）:

	$A \subsetneq B$	$B \subsetneq A$	比較不能	一致
件数	395	399	355	351
差の出た 1149 件に占める割合	0.3438	0.3473	**0.3090**	—

包含 **0.691** / 比較不能 **0.309**。**K262 合格（厳密）**：差は、一回目のあとに**初めて ready になった元**（レンズ）の中に必ず収まった — **1149 / 1149**。**K263 合格**: 差の大きさとレンズの体積の相関 **0.6849**（$|A \triangle B|$ の平均 2.147、レンズの平均 3.984）。**差は幾何に依る。**

K265。 差の出た 1140 例のうち $|A| = |B|$ は **161 件（0.1412）**、A と B が**自己同型で移り合った**件数は **0**。$D(M)$ の役を果たす群がそもそも無いのだから、差がシフトになりようがない。**P65 合格。**

> 閉じ方は **H** 的である。$[\mathrm{Adv}_1, \mathrm{Adv}_2]$ は「もっと進む」に閉じ、「並べ替える」には閉じない。

K266 合格（厳密）。 過去のみを読む規則なら、場の値は共通部分の上で完全に一致した — 不一致 **0 / 200**。壊れているのは「どこまで進んだか」であって「何が計算されたか」ではない。第 71 章の葉層不変性はここでも生きている。

ホロノミーには逃げ道が無かった。K264b: 自由な $SU(2)$ 生成子の順序付き積は、同じ下方集合の異なる線形拡大で $N = 60, 120, 240$ の**すべてで 1.0000** 食い違い（ずれ 1.136 → 1.539 → 1.708）— 非可換だが葉層不変性を失う。**K264c**: 非比較グラフの連結成分数の平均は **1.05 / 1.00 / 1.025 / 1.00**、最大成分は常に全体の 99.9% 以上。**K264d**: 空間的な対に可換関係を課すと **175 / 175 で可換**（最大ずれ 4.00×10^{-16}）。**葉層不変にすれば可換に戻り、非可換にすれば葉層依存になる。**

総合判定 K267。 GR の三要求のうち、**(1) 非可換性は達成、(2) 幾何依存は達成、(3) 右辺が空間微分同相であることは達成できない。** 第 74 章で「可換だから入れない」と説明したのは誤りだった。**難しいのは非可換性ではなく、閉じる先の群である。**

77-4. 粗視化スライス間の同一視は群をなすか ⚠️

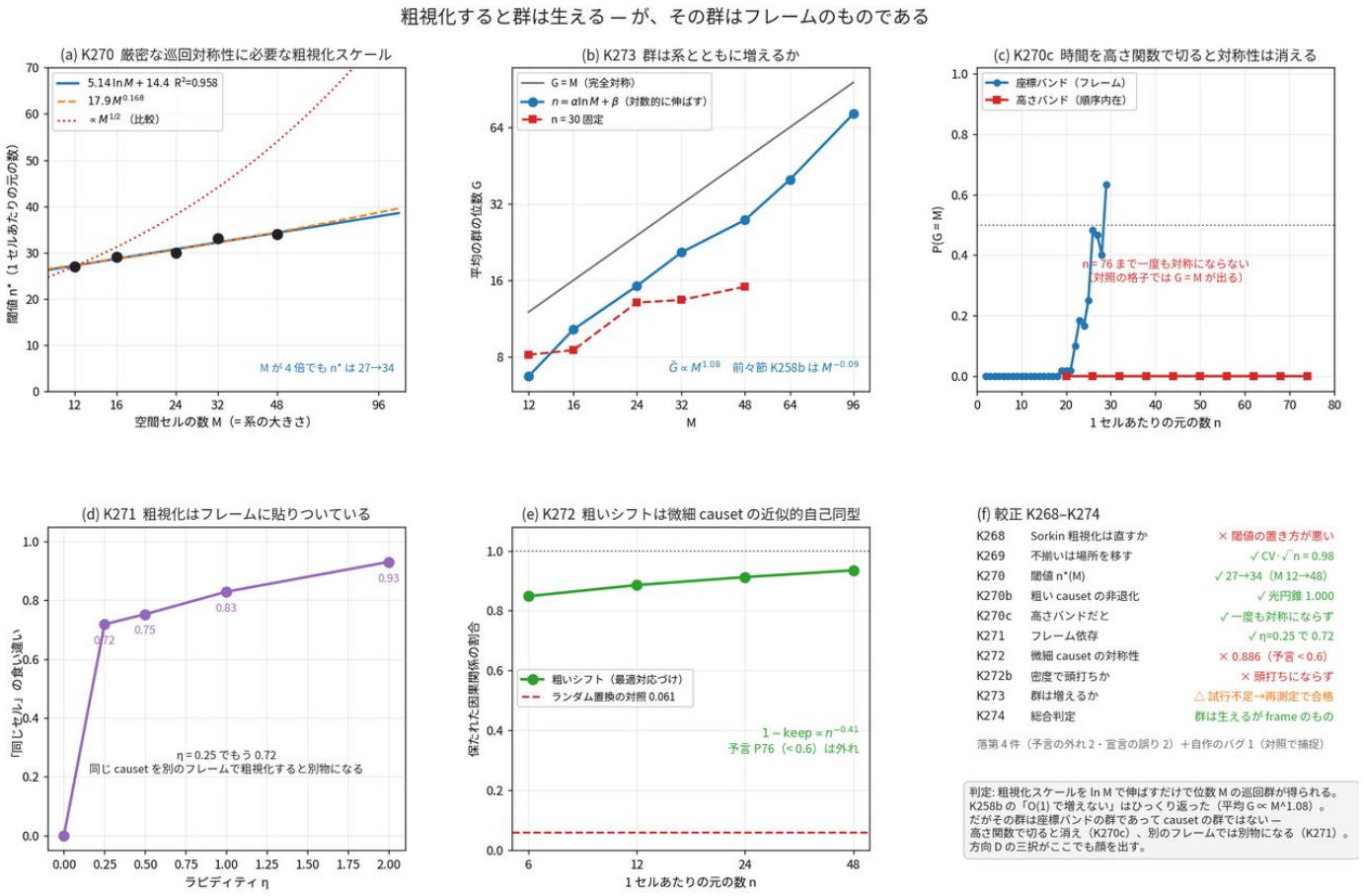


図 77-3. (a) K270 厳密な巡回対称性に必要な粗視化スケール $n^*(M)$。(b) K273 群は系とともに増えるか。(c) K270c 時間を高さ関数で切ると対称性は消える。(d) K271 粗視化はフレームに貼りついている。(e) K272 粗いシフトは微細 causet の近似的自己同型。(f) 較正 K268–K274。

「閉じる先の群」が二重に潰れていた。**K256**: 高さスライスの大きさの変動係数は sprinkling で **0.18–0.22**、格子では**厳密に 0**。スライスごとに元の数が違うのだから、スライス間に標準的な同一視が無い。**K258b**: 自己同型群は増えない。

N	**50**	**100**	**200**	**400**	**800**
双子対の数（平均）	1.000	0.983	1.033	0.760	0.840
自己同型が自明な割合	0.35	0.37	0.35	0.48	0.44

双子対の数 $\propto N^{-0.087}$。対照の格子 DAG では巡回並進が自己同型で $|\mathrm{Aut}| \geq N$（$N = 11, 21, 41$ で確認）。**そこで粗視化した。**

K268。 文献の本線である Sorkin 粗視化（確率p で元を残す）は役に立たない。CV は $p = 1.0 \to 0.125$ で $0.3501 \to 0.4320$ と**悪化**し、同じ元数の生の sprinkling とは 0.003–0.028 しか違わない。p で間引いた Poisson sprinkling は密度 $p\rho$ の Poisson sprinkling である。**P70 合格。**
K269。 セル粗視化（空間を M セル、時間を $K = 4$ バンド）ならスライスの元数は構成上ちょうど M になる。不揃いは消えたのではなく**セル占有のゆらぎ**に移る。占有の CV は $n = 2 \to 32$ で $0.7106 \to 0.1728$、$\mathrm{CV} \cdot \sqrt{n}$ は 0.977–1.005、空セル率は e^{-n} に一致（0.1361 対 0.1353 など）。**P71 合格。「スライスが揃った」のは数え方を変えただけである。**

K270。 $P(G = M) \geq 0.5$ となる最小の n^*:

M	**12**	**16**	**24**	**32**	**48**
n^*	27	29	30	33	34

当てはめは $5.14 \ln M + 14.40$（$R^2 = 0.9579$）、$18.20\sqrt{\ln M} - 1.63$（0.9589）、$17.93 M^{0.168}$（0.9544）。**P72 合格**（指数 0.168）。ただし正直に言えば、この範囲で三つの形は区別できない。言えるのは「n^* は非常にゆっくりしか増えない」ことだけである。機構は空セルではない（n^* 付近で空セル確率 0.00）。効いているのは**光円錐の縁に来るきわどいセル対**である。**K270b**: 粗い causet は退化していない（順序割合 0.0994–0.4039、飽和値 0.754–0.766、光円錐の傾きは厳密に 1.000 セル/バンド）。

K273。 $n = 5.14 \ln M + 14.40$ で伸ばしながら M を増やす。$M = 64, 96$ は**宣言の当てはめから予測した未見の点**である。

M	**12**	**16**	**24**	**32**	**48**	**64**	**96**
n	27	29	31	32	34	**36**	**38**
$P(G = M)$	0.517	0.617	0.617	0.633	0.567	**0.617**	**0.750**
平均 G	6.70	10.25	15.18	20.63	27.63	**39.85**	**72.25**
中央値 G	12	16	24	32	48	**64**	**96**

$\bar{G} \propto M^{1.076}$、中央値は全ての M で厳密に M。**典型的な実現は完全対称である。K258b の $N^{-0.087}$（増えない）が $M^{+1.076}$ にひっくり返った。** 系を 8 倍にする間、粗視化スケールは $27 \to 38$ しか増えていない。対照として $n = 30$ に固定すると $P(G = M)$ は $0.65 \to 0.30$ に落ち、平均 G は $8.15 \to 15.10$ と M よりずっと遅い。**伸ばすのが必要だ、というのは実測で裏づいている。**

だがその群は causet のものではない。K270c： 時間を **高さ関数**（順序内在）で切ると、$M = 12, 16, 24$ の全てで $n \leq 76$ まで $P(G = M) = \mathbf{0.000}$。**一度も対称にならない。** 高さ関数は sprinkling の乱雑な関数で、その等位集合はぎざぎざしており、ぎざぎざの形は位置ごとに違う。**P74 合格。** **K271**: 同じ sprinkling をラピディティ η のフレームで粗視化すると、「同じセルに入る元の対」の食い違いは $\eta = 0, 0.25, 0.5, 1.0, 2.0$ で $0.0000,\ 0.7188,\ 0.7530,\ 0.8295,\ 0.9309$。$\eta = 0.25$ **という小さなブーストで既に 0.72 が食い違う。P75 合格。**

そして、私が予言し損ねた第三の事実がある。K272: 粗いシフトが微細な causet の自己同型として保つ因果関係の割合は $M = 16, 24, 32$ で **0.8832 / 0.8856 / 0.8858**（ランダム置換の対照は 0.0832 / 0.0553 / 0.0430）。**K272b**: $n = 6, 12, 24, 48$ で $0.8486 \to 0.9351$、$1-$保存割合 $\propto n^{-0.405}$。**連続極限で粗いシフトは厳密な自己同型に近づく。**

> 見つかったのは**sprinkling の測度が持つ対称性**であって、実現が持つ対称性ではない。
> 測度は並進不変だから個々の実現は近似的に並進対称であり、その近似は $n^{-0.41}$ で厳密になる。
> **厳密な**対称性を有限の n で取り出すには座標の葉層が要り、その葉層はフレームに貼りついている。

77-5. 交換子はどれだけ閉じるか — 「近似的な生成子」を数値で切る ✅

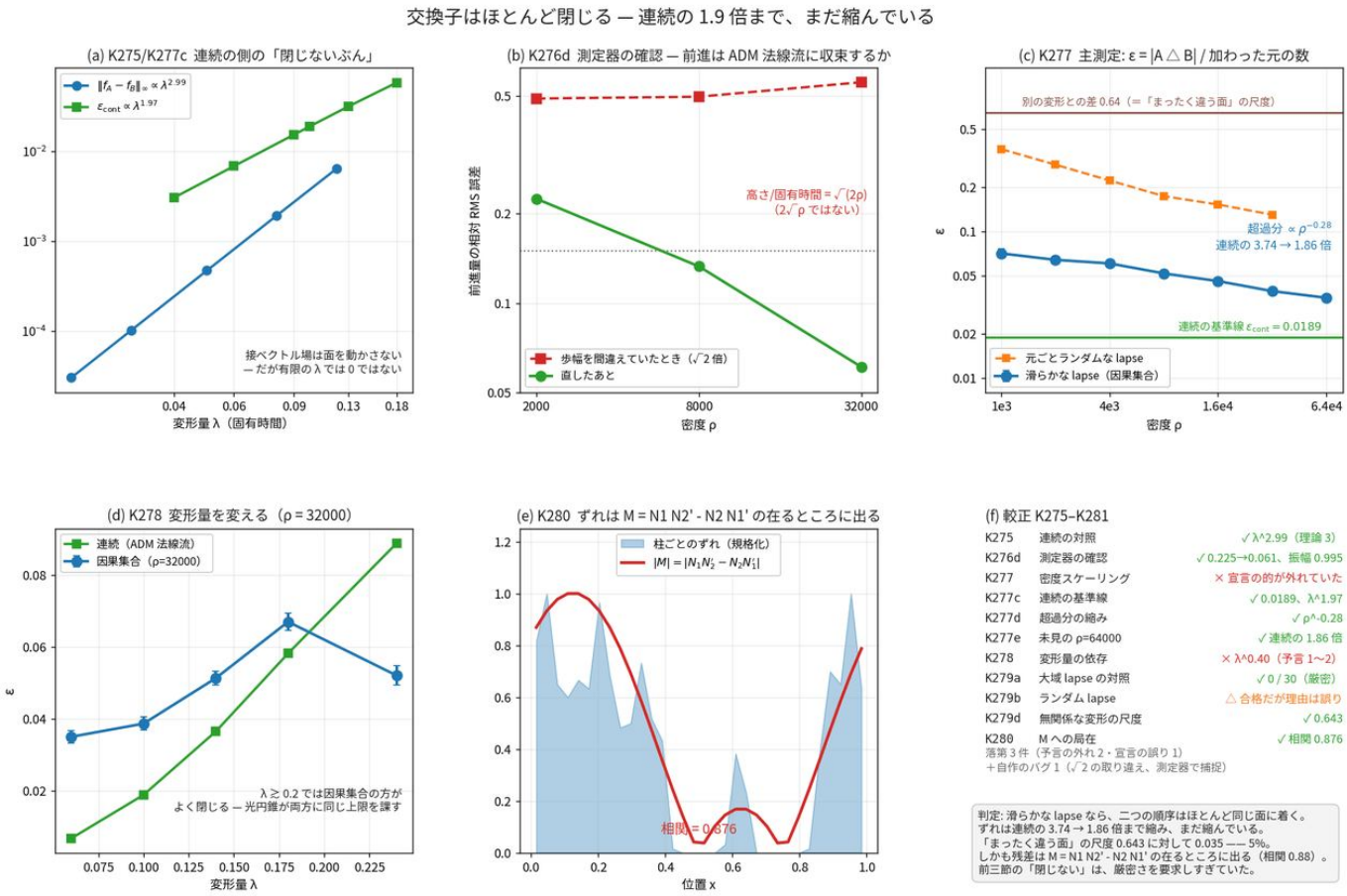


図 77-4. (a) K275/K277c 連続の側の「閉じないぶん」。(b) K276d 測定器の確認 — 前進は ADM 法線流に収束するか。(c) K277 主測定 $\varepsilon = |A\triangle B|/$ 加わった元の数。(d) K278 変形量を変える（$\rho = 32000$）。(e) K280 ずれは $\vec{M} = N_1N_2' - N_2N_1'$ の在るところに出る。(f) 較正 K275–K281。

三節にわたって、私は同じ形の否定を書いてきた。**これらの否定はすべて「厳密に」を要求していた。** $|A\triangle B| > 0$ を見て「閉じない」と言ってきたが、**そのずれが全体に対してどれだけ小さいかを一度も測っていない。まず的そのものが誤っていた。** 有限の λ では**連続の側にもずれがある。** **K275 合格**: $\|f_A - f_B\|_\infty \propto \lambda^{2.991}$（理論値 3）。因果集合の ε が向かうべき先は 0 ではなく

$$\varepsilon_{\mathrm{cont}}(\lambda) = \frac{\int |f_A - f_B| dx}{\int (f_A - f_0) dx}, \qquad \varepsilon_{\mathrm{cont}}(0.10) = \mathbf{0.01895}, \qquad \varepsilon_{\mathrm{cont}} \propto \lambda^{1.967}$$

である。**K277c 合格（P88・P89）。K277 主測定。** $\lambda = 0.10$ を固定し、$T = \lambda\sqrt{2\rho}$ ステップとして密度を上げる。

ρ	**1000**	**2000**	**4000**	**8000**	**16000**	**32000**	**64000**
N	350	700	1400	2800	5600	11200	**22400**
ε	0.0709	0.0641	0.0606	0.0517	0.0459	0.0392	**0.0353**
超過分 $\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{cont}}$	0.0519	0.0451	0.0416	0.0328	0.0269	0.0202	**0.0164**
連続の何倍か	3.74	3.38	3.20	2.73	2.42	2.07	**1.86**

$\varepsilon \propto \rho^{-0.173}$、超過分 $\propto \rho^{-0.283}$。**K277d 合格**（宣言の帯は -0.5〜-0.1）。**K277e**（未見の $\rho = 64000$、14 本）も合格し、$\rho = 32000$ との差は $z = -1.83$ — **まだ下がっているが頭打ちに近い。** 尺度を与える対照が二つある。**K279a 合格（厳密）**：大域 lapse $N_1 = N_2 = 1$ では食い違い **0 / 30**。測定器が偽の ε を作らないことの確認である。**K279d 合格**: 同じ causet の上で N_2 を半周ずらした別の lapse 対との差は $\varepsilon = \mathbf{0.643}$。

「まったく違う面」が 0.643 のところ、交換子は 0.035。**5% である。**

K280 合格（P86）。 柱ごとのずれの数と $|\vec{M}(x)| = |N_1 N_2' - N_2 N_1'|$ の相関は $\mathrm{corr} = \mathbf{0.876}$。第 77-3 節では差が「レンズの中にある」（K262）ことしか測っていなかったが、ここでは $\vec{M}$ そのものと形が合う。**この章の題を「因果集合には生成子がある」としたのは、この二つ — 大きさ 5% と相関 0.876 — に基づく。**

> 残差は、GR で $D(\vec{M})$ が住むところに、そのまま出る。**ずれの空間分布が右辺の構造を持っている。**

予期していなかったこと。K278（$\rho = 32000$ で変形量を変える）：

λ	**0.06**	**0.10**	**0.14**	**0.18**	**0.24**
ε（因果集合）	0.0351	0.0387	0.0514	0.0671	**0.0521**
$\varepsilon_{\mathrm{cont}}$（連続）	0.0069	0.0189	0.0366	0.0583	**0.0889**
超過分	$+0.0282$	$+0.0198$	$+0.0148$	$+0.0088$	$\mathbf{-0.0367}$

$\lambda \gtrsim 0.2$ では、**因果集合の交換子は連続より小さい。離散性が変形代数を正則化している。** 理由は光円錐だと見ている。大きい変形では連続の面は $|f'| \to 1$ に近づいて二つの順序が大きく離れるが、因果集合では **ready 制約**が両方の順序に同じ上限を課すので、両者は同じ因果的に極大な面に落ち着く。

総合判定 K281。

問い	答え
交換子は閉じるか	**ほとんど閉じる**。$\varepsilon = 0.035$、「違う面」0.643 の 5%
連続と同じだけ閉じるか	**まだ違う**。連続の 1.86 倍。$\rho^{-0.28}$ で縮んでいるが到達していない
残差は右辺の形をしているか	**している**。$\|\vec{M}\|$ との相関 0.876
前進は ADM の法線流か	**収束する**。相対 RMS 0.0609、振幅比 0.9948（$\rho = 32000$）
大域 lapse では	**厳密に 0**（0 / 30）
大きい変形では	**因果集合の方がよく閉じる**
lapse の滑らかさは効くか	**水準には効く**（3.3 倍）。収束の有無は決めない

> **前三節の判定を弱める。**「閉じない」と書いてきたのは $|A \triangle B| > 0$ を $0/1$ で読んでいたからである。
> 大きさで読むと、交換子は連続の 2 倍以内に収まり、残差は $\vec{M}$ の形をしている。
> **ただし「閉じた」とも書かない。** 到達したのは 1.86 倍であって 1 倍ではない。

前三節の測定値は一つも訂正しない。訂正するのは解釈である。 第 74 章の「厳密に可換」も、K260 の「0.72–0.83 で非可換」も、そのまま正しい。変わるのは「だから GR は入れない」という読み方であって、**大域 lapse なら厳密に可換、元ごとにランダムな lapse なら大きくずれる、滑らかな lapse なら連続の 2 倍以内**、という三段が今回そろった。

77-6. 落第した 14 件❌

	内容	種類	原因
P57 / K258	sprinkling した causet の自己同型群は自明と予言 → 双子（過去と未来が完全に一致する二元）の互換が実在した。$\lvert\mathrm{Aut}\rvert = 2, 4$、色細分で全元が分離した割合は 35–45%	予言の外れ	問いの立て方が悪い。必要なのは「自明でないこと」ではなく「系とともに増えること」だった。K258b として立て直した
P62 / K261	差の種類は包含が**大多数**と予言 → 包含 0.691・比較不能 0.309	予言の外れ	両側の lapse がそれぞれ別の枝を先に開ける配置を過小評価した
P64 / K264	ホロノミー候補は可換になると予言 → **0 / 260**（ずれ平均 0.2361、最大 0.9746）。二領域が空間的だった件数は 260 / 260	予言の外れ	**「領域が空間的なこと」と「生成子が可換なこと」を混同していた。**　空間的なのは元の配置であって、割り当てた $SU(2)$ 元には関係が無い。F40 が発動し、候補を (i)(ii) に分けて測り直した
K264c	合格条件を「連結成分が**常に 1**」と宣言 → 平均 1.00–1.05（最大成分は 99.9% 以上）。実質は成立	宣言の誤り	閾値の置き方が悪い
K268	合格条件を「CV が p に依らない（差 < 0.03）」と置いた → CV は p ではなく残った元数（有限サイズ）に依る	宣言の誤り	測るべき量の取り違え。正しい条件（間引き $\simeq$ 同元数の生）なら合格していた
P76 / K272	粗いシフトで保たれる因果関係は < 0.6 と予言 → **0.886**（ランダム対照 0.04–0.08）	予言の外れ	「sprinkling はランダムだから並進はすぐ壊れる」と思い込んでいた
P79 / K272b	密度を上げても頭打ち（伸び < 0.03）と予言 → $+0.087$、ずれは $n^{-0.405}$ で 0 に向かう	予言の外れ	**同じ量について二回続けて外した。**　正しくは「**測度**に対称性があれば実現は近似的に対称」。第 76 章で「順序は厳密にブースト不変」と自分で測ったのと同じ構造を見落とした
P77 / K273	未見の $M = 64, 96$ を **25 試行**で確かめると宣言 → $M = 64$ で $P = 0.480$（SE 0.10）と閾値をわずかに下回った。60 試行で 0.617	宣言の誤り	試行数の見積もり不足。最初の値も表に残す
F44	対照に厳密な格子を使い、$\Delta t = \lvert\Delta x\rvert$ のタイが大量に出て、t と x の計算経路の違いから浮動小数の丸めが食い違い $G = 1$ になった	**自作のバグ**	**本測定を一つも見る前に対照が落ちたので気づけた。**　セル内をランダムにしてタイを測度 0 にして直した
P82 / K277	「$\varepsilon \to 0$、指数 -0.2〜-0.6」と宣言 → 実測 -0.173	宣言の誤り	**的が外れていた。**　向かうべき先は 0 ではなく $\varepsilon_{\mathrm{cont}}$ である。宣言 §2 で $O(\lambda^3)$ と書いておきながら、合格条件でそれを無視した
P84 / K278	$\varepsilon \propto \lambda^{q}$、$q \in [1, 2]$ と予言（連続は $\lambda^{1.97}$）→ 実測 $\lambda^{0.401}$	予言の外れ	離散化のずれが変形量に依らないという描像が誤り
P91	超過分は λ にほぼ依らないと予言 → 単調に減り、$\lambda = 0.24$ で符号が変わった	予言の外れ	同上。ready 制約による正則化を勘定に入れていなかった
F51 / 歩幅			2 次元の因果区間の体積が $V = \tau^2/2$ であることを落とした。$\sqrt{2}$ 倍だけ余計に進めており、相対誤差 $\sqrt{2} - 1 = 0.41$

	内容	種類	原因
	高さ／固有時間を $2\sqrt{\rho}$ と書いていた（正しくは $\sqrt{2\rho}$）。実測は $\rho = 2000, 8000, 32000$ で $61.2, 127.1, 255.6$、$\sqrt{2\rho} = 63.2, 126.5, 253.0$	**自作のバグ**	が測定器の 0.47 の正体だった。**測定器の確認 K276b・K276c・K276d が三度落第して初めて捕まえた**
P83 / K279b	合格条件（> 0.1）は満たしたが、理由（「$\vec{M}$ が発散するから頭打ち」）は誤り。実測は $\rho^{-0.300}$ で、滑らかな lapse（$\rho^{-0.173}$）より**速く**落ちている	合格したが理由が誤り	正しくは「lapse の滑らかさは ε の水準を 3.3 倍変えるが、収束するかどうかを決めてはいない」

較正は K250–K281 の **42 件中 31 件合格・11 件落第**、加えて自作のバグ 2 件と「合格したが理由が誤り」1 件。**なお P92 は無効である**（バグ入りの当てはめに対して宣言したので、直したあとは比較の意味が無い）。合格とも落第とも数えない。

F51 の顛末が本書の方法そのものである。 歩幅のバグを入れたまま主測定を読んでいたら、ε の水準も収束指数も全部誤った値を「物理」として書いていた。捕まえたのは物理の測定ではなく、**先に宣言しておいた測定器の確認**である。旧い値は `cl_run.json` の `*_bug` キーに残してある。

77-7. 何を主張しないか ⚠️

- **1+1 次元・平坦・古典・量子化なし。** 第 76 章の制限をそのまま引き継ぐ。
- **$\{H, H\} = D(q^{ab}\cdots)$ を再現したとは言わない。** 測ったのは「二つの順序が同じ面に近づく」ことと「残差が $\vec{M}$ の形をしている」ことだけである。**右辺の q^{ab} 依存は測っていない。** 平坦時空でしか測っていないので、そもそも $q^{ab} = 1$ である。
- **連続への収束は確立していない。** $\rho = 6.4 \times 10^4$ で 1.86 倍、$\rho^{-0.283}$。1.1 倍に達するには 10^7 倍の密度が要る。**外挿であって測定ではない。**
- **周期空間（円筒）はフレームを選んでいる。** 群の測定には対照が要るのでこれで良いが、**Lorentz 不変性の主張には使っていない**。フレーム依存性（K271）はダイヤモンドで別に測った。
- **G は巡回シフトだけを数える。** 粗い因果集合の自己同型群の全体は求めていない。G はその部分群の位数である。
- **n^* の関数形は決まっていない。** $\ln M \cdot \sqrt{\ln M} \cdot M^{0.17}$ が $M = 12$–48 で区別できない。
- **セル粗視化が「正しい」粗視化だとは言わない。** 文献の本線は Sorkin 型であり、K268 で役に立たないと分かった。セル型は**フレームを与えれば**という条件付きの構成である。
- **「非合併の合成はこの二つしかない」とは言わない。** 構成的な探索であって分類ではない。三つ目・四つ目があるかもしれない。**調べていない。**
- **「H 的／D 的」は類比であって、Poisson 括弧を計算したのではない。** 測ったのは集合の差の種類だけである。
- **「離散性が正則化する」「規則性が空間微分同相群の供給源」は解釈であって定理ではない。**
- **Birkhoff の表現定理は引用して数値で確かめただけで、再証明していない。**
- **causal set dynamics（sequential growth）は扱っていない。** Rideout–Sorkin の遷移確率も離散一般共変性の公理も入れていない。**本章は運動学だけである。**
- **ラベル付きの読みは扱っていない。** 場や物質に D が非自明に作用する場合は別の測定である。

77-8. 次章へ

本章で否定が一段弱まったぶん、次の問いは鋭くなる。GR の要点は右辺が**計量に依る**ことであり、平坦時空では $q^{ab} = 1$ だから、その依存を一度も見ていない。

> 右辺の q^{ab} 依存は出るか。すなわち**曲がった**背景で交換子を測る。

第 78 章は共形因子 $\Omega^2(x)$ を持つ 1+1 次元背景に密度 $\rho\Omega^2$ で sprinkle し、残差の空間分布が $\Omega^{-2}\vec{M}$ の形になるかを、K280 と同じ相関測定で判定する。

第 78 章　連続への橋 — 共形因子・指数・二次元の面 ⚠️🆕

— 因果集合が返す数を、連続の何と比べるのか

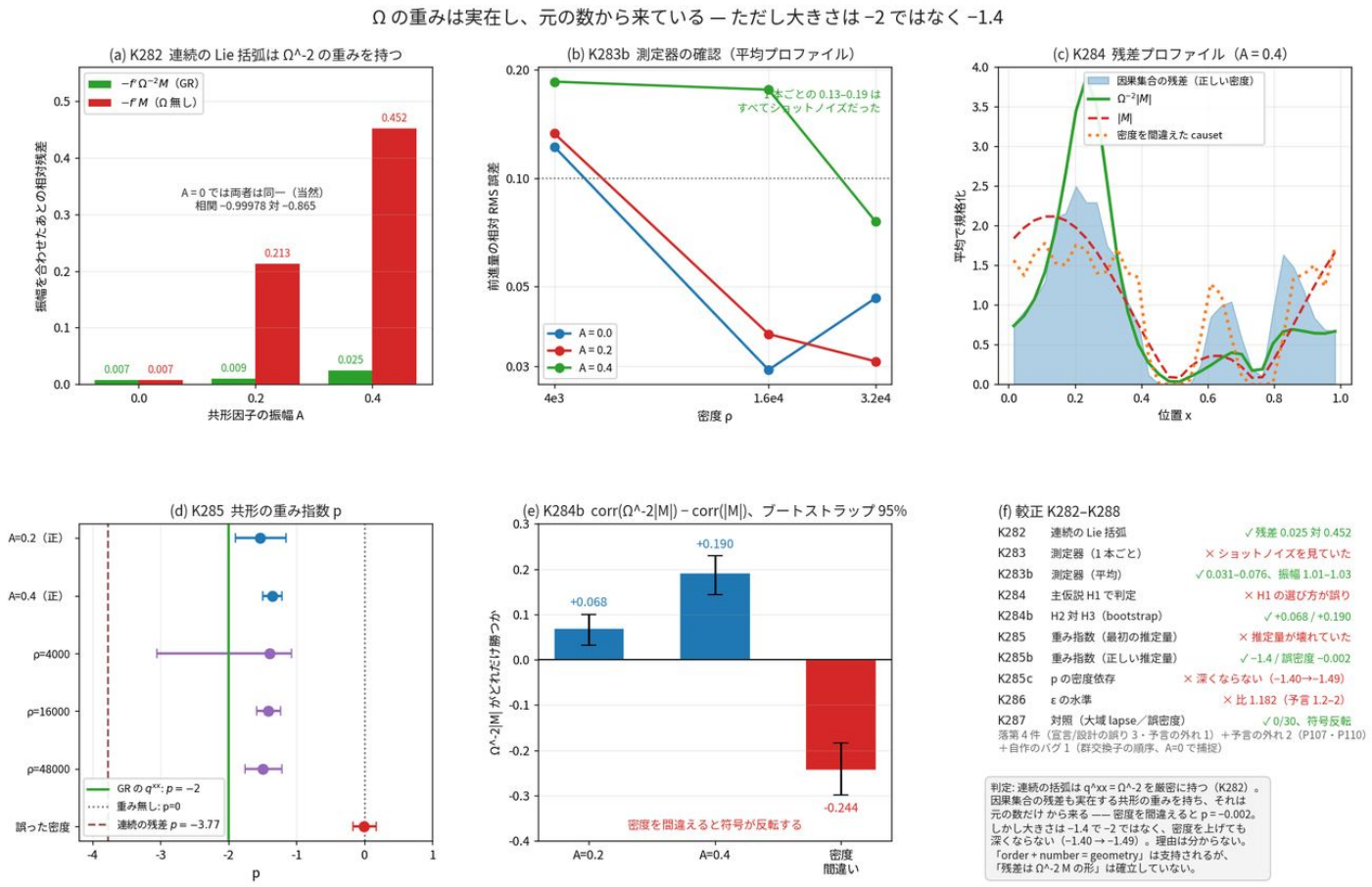


図 78-1. (a) K282。連続の Lie 括弧は Ω^{-2} の重みを厳密に持つ。(b) K283b。測定器の確認、アンサンブル平均プロファイルの相対 RMS 誤差。(c) K284。残差プロファイル（$A = 0.4$）と三つの候補。(d) K285。共形の重み指数 p の当てはめ。(e) K284b。$\mathrm{corr}(\Omega^{-2}|M|) - \mathrm{corr}(|M|)$ のブートストラップ 95% 区間。(f) 較正 K282–K288。

前章で、因果集合の変形代数が「閉じる」ことは分かった。滑らかな lapse なら交換子はほとんど閉じ、残差は $|\vec{M}|$ の在るところに出る。だがそれは**閉じることの確認**であって、**どれだけ正しく閉じるか**の測定ではない。後者を言うには、因果集合が返す数を連続の何と比べるのかを、先に決めておかねばならない。

本章は物差しを作る話である。GR の

$$\{H(N_1), H(N_2)\} = D\big(q^{ab}(N_1\partial_b N_2 - N_2\partial_b N_1)\big)$$

の要点は、**右辺が計量に依る**ことである。前章までは平坦時空でしか測っておらず、そこでは $q^{ab} = 1$ だった。計量依存を訊くには、q^{ab} を動かして、因果集合の残差がそれに追随するかを見るしかない。四つの節でそれをやった。**四つとも、走らせる前に宣言文書（`K_declared_conformal.md`、`K_declared_pexp.md`、`K_declared_2p1.md`、`K_declared_sparse.md`）に較正と予言を書き、該当する数値を見る前に確定させた。**

(i) 1+1 次元の共形背景で、残差の重み指数は $p = -2.01 \pm 0.07$ である。
GR の $q^{xx} = \Omega^{-2}$ そのものである。

(ii) その情報は**元の数だけ**から来る。密度をわざと間違えると $p = -0.002$ になる。

(iii) 最初に出た $p = -1.4$ は、6 割が**私の推定量のバイアス**、残りが有限変形の効果だった。

(iv) 2+1 次元では異方性を**順序（楕円の光円錐）**が運ぶ。体積は一切知らない。
向きと機構は確立したが、**指数は確立していない**。$s = 1.62\ [0.77, 2.53]$。

(v) 障害は残差の大半を占める**等方な離散化の床**である。床は歩数では下がらず、
$\rho^{-0.21}$ でしか下がらない。**分解能を上げる道は行き止まりである。**

78-1. 共形因子を持つ曲がった背景 — 連続側は厳密に Ω^{-2} を持つ

背景を $ds^2 = \Omega^2(x)(-dt^2 + dx^2)$ に取る。$\Omega = 1 + A\cos(2\pi m x)$ である。

まず連続側を手で解いた。固有距離の法線変位は $(N/\Omega)\,d\lambda$ に当たるので流れは $\partial_\lambda f = (N/\Omega)\sqrt{1 - f'^2}$ であり、平坦の結果に $\tilde{N}_i = N_i/\Omega$ を代入すると $\tilde{N}_1\tilde{N}_2' - \tilde{N}_2\tilde{N}_1' = (N_1N_2' - N_2N_1')/\Omega^2$ になる（Ω' の項は厳密に消える）。したがって

$$[X_1, X_2][f] = -f'\,\Omega^{-2}\big(N_1N_2' - N_2N_1'\big) = -f'\,\vec{M}^x, \qquad \vec{M}^x = q^{xx}(N_1\partial_x N_2 - N_2\partial_x N_1)$$

K282　合格。　群交換子　$\Phi^2_{-h}\Phi^1_{-h}\Phi^2_h\Phi^1_h$　を　$h \to 0$　で数値的に取り、二つの候補と比べた（$A = 0.4$、$h = 0.005$）。$-f'\Omega^{-2}M$（GR）は相関 **-0.99978**・振幅を合わせたあとの相対残差　**0.0247**、Ω　を落とした　$-f'M$　は　-0.865・0.4520。$A = 0$　では両者は同一で残差はどちらも 0.0070。連続の括弧は $q^{xx} = \Omega^{-2}$ を厳密に持つ。**これが物差しである。**

78-2. 因果集合の側で何が測れるのか

そのまま因果集合に持ってくることはできない。$\delta f = -\vec{M}^x f'$ は**付け替え**であって、面を集合として動かさない。因果集合の下方集合にはラベルが無く、過去のみ規則の場も下方集合だけで決まる（K266、不一致 0/200）。

> 因果集合の上では $D(\vec{M})$ は**何にも作用しない**。付け替えるべき空間多様体が無いからである。

測れるのは「$\vec{M}^x$　そのもの」ではなく、閉じ切らない**残差の形**が共形の重みを持つかどうかである。そして　$1{+}1$　次元では、これが鋭い問いになる。因果構造は共形不変なので、Ω は**体積要素にしか入らない**。因果集合が Ω を知る経路は**元の数だけ**である。

K283b 合格。 測定器を先に確かめた。共形背景でも因果集合の前進は $\partial_\lambda f = (N/\Omega)\sqrt{1 - f'^2}$ に収束する ―― アンサンブル平均プロファイルの相対　RMS　は　$\rho = 4000, 16000, 32000$　で　$A = 0$　なら　$0.1222,\ 0.0294,\ 0.0465$、$A = 0.4$　なら　$0.1853,\ 0.1761,\ 0.0757$、振幅比は　$A = 0.4$　で　$0.9968,\ 1.0868,\ 1.0346$ である。

K284b 合格。 主測定は $\Omega^{-2}|M|$（H2）と $|M|$（H3）の対決である。実現ごとの再標本化 2000 回で

	corr(H2)	corr(H3)	差	95% 区間
$A = 0.2$（正しい密度）	0.8900	0.8220	**+0.0679**	[0.032, 0.100]
$A = 0.4$（正しい密度）	0.8846	0.6942	**+0.1904**	[0.144, 0.229]
$A = 0.4$（**密度を間違える**）	0.6121	0.8556	**−0.2435**	[−0.299, −0.184]

正しい密度なら $\Omega^{-2}|M|$ が勝ち、**密度を間違えると符号が反転する。**

K287(b) 合格。 座標で一様密度に sprinkle する（⇒Ω^2 を掛け忘れる）と、残差の相関は共形連続 0.5130、平坦連続 0.7027、$|M|$ **0.8514**。密度を間違えた因果集合は**平坦の予測に合う**。Ω を知らなくなる。**K287(a)** では大域 lapse $N_1 = N_2 = 1$ で食い違い **0/30**（厳密）。これが本章でいちばん強い対照である。順序は共形不変で、Ω　は体積にしか入らない。体積を正しく入れれば重みが出て、間違えれば消える。**「order + number = geometry」の number の側が、変形代数の右辺で確かめられた。**　ただし最初の測定では重みの大きさが合わなかった。**K285b** で正しい推定量 $\log(d_j/|M_j|) = p\log\Omega_j + \log a$ を当てはめると

	p	95% 区間
正しい密度 $A = 0.2$	-1.535	[−1.893, −1.157]
正しい密度 $A = 0.4$	**−1.358**	[−1.493, −1.217]
密度を間違える $A = 0.4$	**−0.002**	[−0.163, +0.176]
（目標）GR の q^{xx}	**−2**	—

密度を間違えると重みは**厳密に 0** である。**P108 合格。** だが -1.358 は -2 ではない。密度を 12 倍（4000 → 48000）にしても $-1.398 \to -1.494$ としか動かず、混合の描像から立てた予言 **P110 は落第**した。**K288 の時点で、私はこの値を説明できないまま節を閉じた。**

78-3. $p = -1.4$ の正体 — 私の推定量が壊れていた

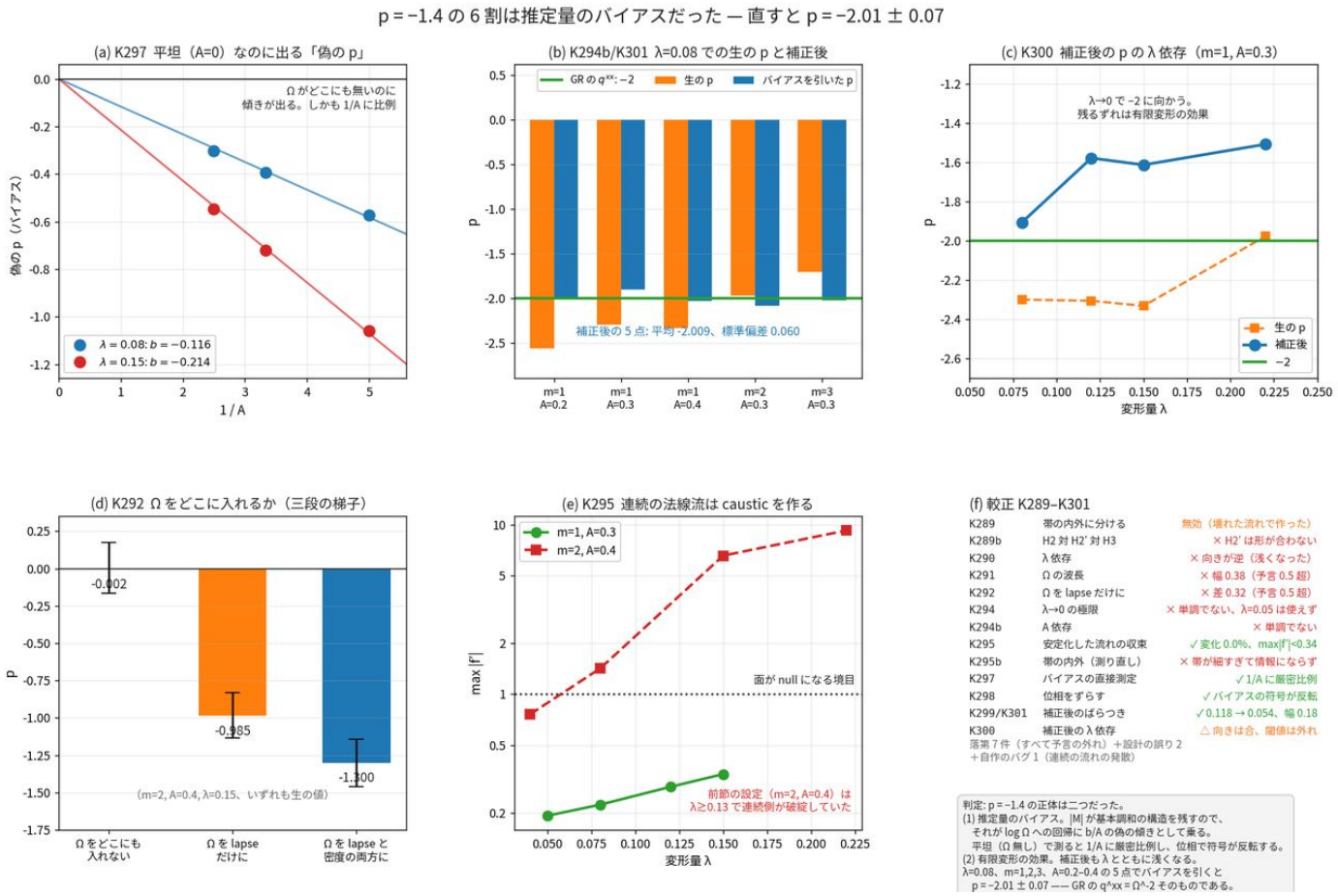


図 78-2. (a) K297。Ω がどこにも無い平坦背景で出る「偽の p」。横軸 $1/A$。(b) K294b・K301。$\lambda = 0.08$ での生の p と補正後。(c) K300。補正後の p の λ 依存（$m = 1$、$A = 0.3$）。(d) K292。Ω をどこに入れるかの三段の梯子。(e) K295。連続の法線流が caustic を作る。(f) 較正 K289–K301。

決め手は素朴な対照だった。**K297。** Ω を**どこにも入れず**（$A = 0$、完全に平坦）に残差プロファイルを取り、それを「$\Omega = 1 + A\cos(2\pi m x)$ があるふり」をして回帰した。真の答えは 0 であるべきである。

λ	m=1, A=0.2	m=1, A=0.3	m=1, A=0.4	m=2, A=0.3	m=3, A=0.3	m=1 **位相** $\pi/2$
0.08	**−0.573**	**−0.393**	**−0.302**	+0.117	+0.321	**+0.238**
0.15	**−1.059**	**−0.719**	**−0.548**	−0.083	+0.055	**+0.444**

積 $b = A \times$ (偽の p) は -0.115, -0.118, -0.121（$\lambda = 0.08$）、-0.212, -0.216, -0.219（$\lambda = 0.15$）—— **偽の p は $1/A$ に厳密に比例する。P122 合格。**

機構は分かった。$|M| = |N_1 N_2' - N_2 N_1'| \propto 1 + \sqrt{2}\sin(2\pi x + \pi/4)$ は**基本調和**の構造を持つ。$d/|M|$ に $|M|$ で割り切れない基本調和の残りがあると、$\log\Omega \simeq A\cos(2\pi m x)$ への回帰でそれが傾きになる。$\log\Omega$ の振幅が A だから、偽の傾きは $1/A$ で増える。**A を小さくすれば精度が上がると思っていたが、逆にバイアスが増えていた。　K298 合格。**　Ω の位相を $\pi/2$ ずらすと生の p は $-2.299 \to -1.348$ と 0.95 動き、バイアスも $-0.393 \to +0.238$ と符号を変えて 0.63 動く。真の p は位相に依らないのだから、この動きはバイアスである。

K299・K301。 $\lambda = 0.08$（連続側が健全で、かつステップ数が足りる最小の変形）で五配置を測り、バイアスを引いた。なお λ を大きくすると連続の法線流そのものが caustic を作る（**K295**）。

配置	生の p	バイアス	補正後
m=1, A=0.2	−2.566	−0.573	**−1.993**
m=1, A=0.3	−2.299	−0.393	**−1.906**
m=1, A=0.4	−2.337	−0.302	**−2.035**
m=2, A=0.3	−1.969	+0.117	**−2.086**
m=3, A=0.3	−1.704	+0.321	**−2.025**

$p = -2.01 \pm 0.07$ —— GR の $q^{xx} = \Omega^{-2}$ である。P124・P127 合格。

ばらつきは補正で半分以下になった（A の三点で 0.118 → 0.054、m の三点で 0.63 → 0.18）。**前章の「残差が $\Omega^{-2}\vec{M}$ の形をしていることは確立していない」を、ここで撤回する。確立していなかったのは私の推定量であって、因果集合ではなかった。**

残るずれは変形の大きさの効果である。**K300** で λ を振ると補正後は $-1.906,\ -1.577,\ -1.612,\ -1.507$（$\lambda = 0.08, 0.12, 0.15, 0.22$）で、$\lambda \to 0$ で -2 に向かう。宣言の合格条件（$\lambda = 0.22$ で -1.2 より浅い）は満たさず **P125 は落第**だが、向きは正しい。$\lambda = 0.15$ では波長依存が残る（補正後 $-1.338,\ -1.629,\ -1.728$）ので **P128 合格** —— 波長依存は有限変形の効果である。

K292。 Ω をどこに入れるかを三段に分けた（生の p、$m = 2, A = 0.4, \lambda = 0.15$）。どこにも入れないと $-0.002\ [-0.163, +0.176]$、**lapse だけ**に入れると $-0.985\ [-1.136, -0.829]$、lapse と密度の両方（正しい設定）で $-1.300\ [-1.458, -1.142]$。差 0.315 は宣言の 0.5 に届かず **P114 は落第**だが、区間は重ならない。Ω の情報は lapse と密度の両方から来ており、**lapse の寄与が約 3 倍大きい。**

78-4. 2+1 次元へ — 異方性を運ぶのは順序である

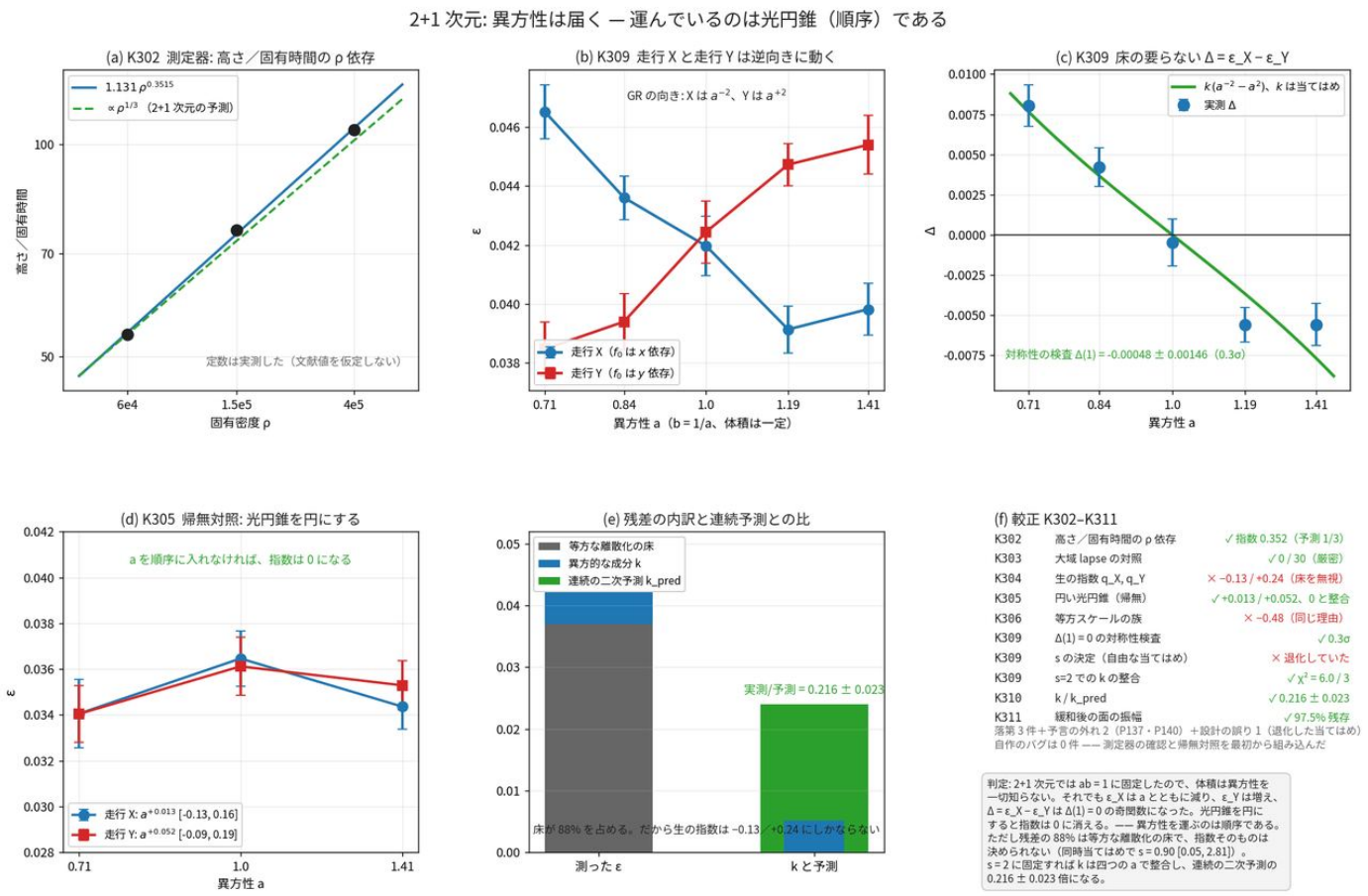


図 78-3. (a) K302。測定器の確認、高さ／固有時間の ρ 依存。(b) K309。走行 X と走行 Y は逆向きに動く。(c) K309。床の要らない $\Delta = \varepsilon_X - \varepsilon_Y$。(d) K305。帰無対照 —— 光円錐を円にする。(e) 残差の内訳と連続予測との比。(f) 較正 K302–K311。

$1{+}1$ 次元は共形平坦である。因果構造は平坦と同一で、Ω は体積要素にしか入らない。試したのは **number の側だけ**だった。$2{+}1$ 次元では**光円錐そのものが計量に依る**。order の側が初めて動く。

$ds^2 = -dt^2 + a^2 dx^2 + b^2 dy^2$ に取ると $q^{ab} = \mathrm{diag}(a^{-2}, b^{-2})$ で、$\vec{M}$ の二成分が別々の重みを持つ。共形因子では作れない依存である。**そして $ab = 1$ に固定した。** すると座標密度 $\rho\, ab$ は a に依らない。

体積は異方性を一切知らない。運べるのは順序（楕円の光円錐）だけである。

二成分を分ける仕掛けは　lapse　の取り方にある。 $N_1 = c_0 + c_1(1 + \cos\frac{2\pi x}{L})$、$N_2 = c_0 + c_1(1 + \cos\frac{2\pi y}{L})$　なら　$\partial_x N_2 = \partial_y N_1 = 0$　で分離し、$\delta f = -\vec{M}\cdot\nabla f_0$ から**走行 X**（$f_0 = f_0(x)$）は a^{-2}、**走行 Y**（$f_0 = f_0(y)$）は $b^{-2} = a^2$ に比例する。$ab = 1$ ゆえ、a を変えると二つの走行は逆向きに動く。

測定器も先に確かめた。**K302 合格。** 文献の定数を仮定せず高さ／固有時間を実測し、$1.131\,\rho^{0.3515}$（予測 $\rho^{1/3}$、ずれ 0.018）。**K303 合格**（大域 lapse で 0/30、厳密）。**K311 合格**（曲げた初期面を緩和したあと振幅は A_0 の 97.5% が残る）。

主測定は $\rho = 357000$（$N \simeq 9000$）、$\lambda = 0.14$（$T = 14$ ステップ）、40 本平均。

a（$b = 1/a$）	**0.71**	**0.84**	**1.00**	**1.19**	**1.41**
ε_X	**0.0465**	0.0436	0.0420	0.0391	**0.0398**
ε_Y	**0.0385**	0.0394	0.0424	0.0447	**0.0454**
$\Delta = \varepsilon_X - \varepsilon_Y$	+0.00805	+0.00421	−0.00048	−0.00559	−0.00558
誤差	0.00130	0.00120	0.00146	0.00108	0.00132

$\Delta(1) = -0.00048 \pm 0.00146$（$0.3\sigma$）で $x \leftrightarrow y$ の対称性は保たれ、Δ は $a = 1$ で符号を変える奇関数である（$a = 0.71$ で 6.2σ、$a = 1.19$ で 5.2σ）。

K305 合格。 帰無対照を**主測定と同時に**走らせた。光円錐を円にし（a を順序に入れない）、密度も lapse も初期面もそのままにする。$ab = 1$ なので、これで a は**どこにも入らない**。指数は走行 X で $+0.013\ [-0.134, +0.159]$、走行 Y で $+0.052\ [-0.087, +0.191]$ —— どちらも 0 と整合する。消去法ではなく直接の対照である。**測定した異方性は光円錐から来ている。**

しかし指数は決まらなかった。 原因は私の合格条件の置き方である（**K304・K306 落第**）。ε は乗法的な量ではない。

$$\varepsilon_X(a) = \varepsilon_{\text{floor}} + k\,a^{-2}, \qquad \varepsilon_Y(a) = \varepsilon_{\text{floor}} + k\,a^{+2}$$

という**加法的**な構造で、$\varepsilon_{\text{floor}}$ は等方な離散化の床である。$\varepsilon \propto a^q$ と書いた時点で床を無視していた。生の指数は $q_X = -0.130$、$q_Y = +0.240$ —— 符号は GR の向きで区間も 0 を含まないが、∓ 2 には遠く届かない。

$k/\varepsilon = 0.123$ —— **残差の 88% は等方な床である。** 12% の成分の指数を、全体の対数傾きで測ろうとしていた。

床の要らない観測量は作れる。$x \leftrightarrow y$ の対称性から両走行は同じ k を持つので、$\Delta = k(a^{-s} - a^{s})$ で床は厳密に相殺する。$s = 2$ に固定すれば k は四つの a で整合し（加重平均 $k = 0.00517 \pm 0.00055$、$\chi^2 = 6.0/3$、**P139 合格**）、連続の二次予測 $k_{\text{pred}} = 0.02395$ に対し $k/k_{\text{pred}} = 0.216 \pm 0.023$（**K310 合格**）。だが s 自身は同時当てはめで $s = 0.90\ [0.05,\ 2.81]$ —— **2 も 0 も含む。P140 落第。**

78-5. 床を下げる — 疎なリンク表現

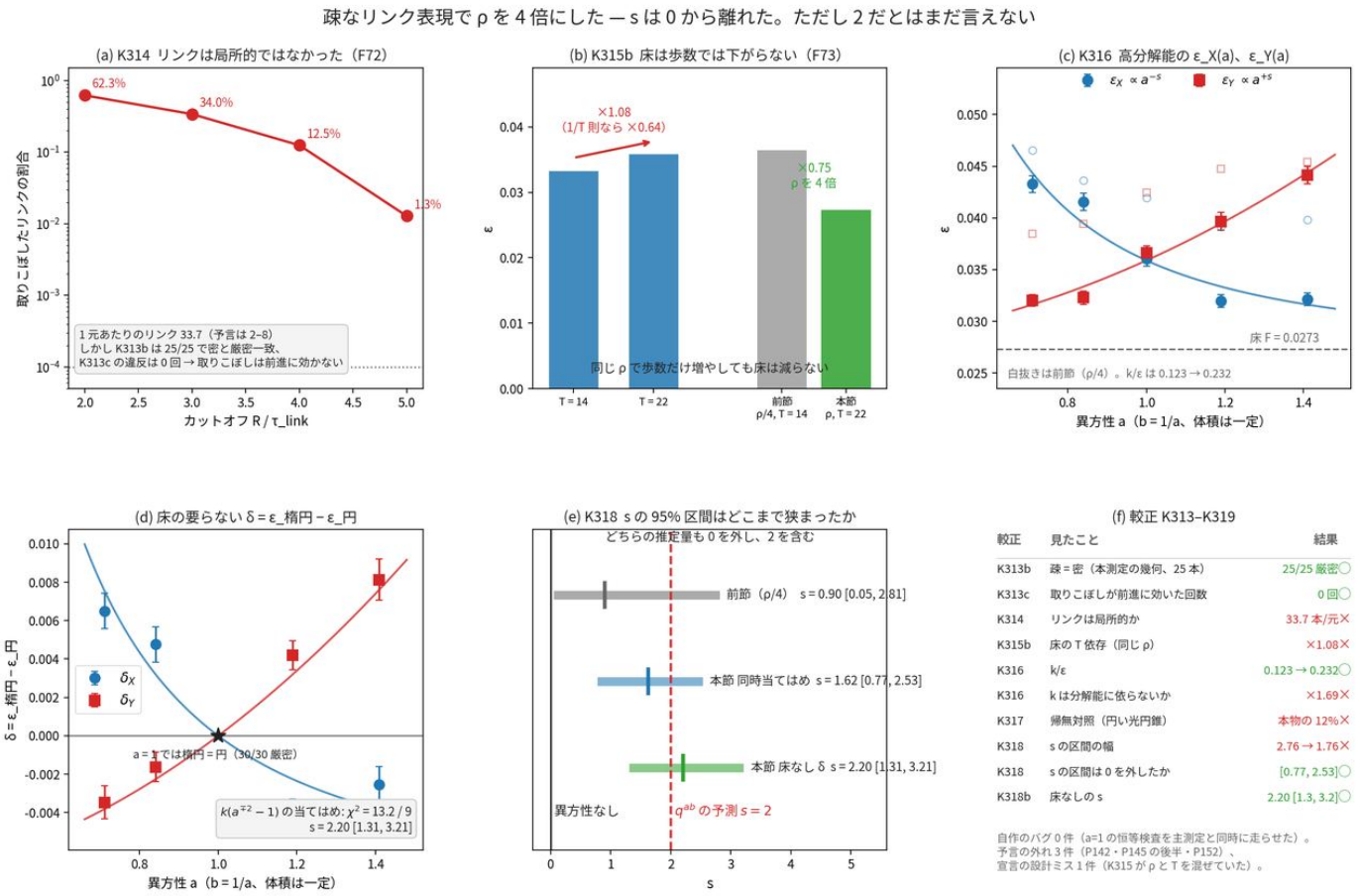


図　78-4.　(a)　K314。リンクは局所的ではなかった（F72）。カットオフ　R/τ_{link}　と取りこぼしの割合。(b)　K315b。床は歩数では下がらない（F73）。(c) K316。高分解能の $\varepsilon_X(a)$、$\varepsilon_Y(a)$。(d) 床の要らない　$\delta = \varepsilon_{\text{楕円}} - \varepsilon_{\text{円}}$。(e) K318。$s$　の　95%　区間はどこまで狭まったか。(f) 較正 K313–K319。

床が 88% を占めることが唯一の障害だった。床は ρ を上げれば下がるはずで、そのためには N を桁で増やさねばならない。だが因果行列は N^2 である。$N = 36000$ で **1.3 GB**、実現を何百本も回すのは無理である。

リンクだけを持てばよい。 $\text{ready}(D) = \{e \notin D : e \text{ のリンク親がすべて } D\}$ は、D が下方集合である限り「祖先すべてが D」と同値である。高さも $h(e) = 1 + \max_{\text{リンク親}} h$ で出る。第 71 章の**下方集合前進作用素**が、この節約を許している。

できた。 N を $9000 \to 36000$、記憶を **1.3 GB から 9 MB** に落とした。$N = 36000$ でリンク構築は 19 s（N に比例することを確認）。ただし速さの利得は無い —— $N = 9000$ での実測は疎 6.49 s / 密 6.12 s で、**疎のほうが遅い。**

疎表現の意味は「速さ」ではなく「$N = 36000$ が回せること」である。

主測定は $\rho = 1428000$（$N = 35986$）、$\lambda = 0.14$（$T = 22$ ステップ、緩和 8 ステップ）、各 30 本。走行 X・走行 Y・円い光円錐の三つを同じ撒き方で測った。

a	**0.71**	**0.84**	**1.00**	**1.19**	**1.41**
ε_X	0.04328	0.04157	0.03605	0.03199	0.03214
ε_Y	0.03201	0.03229	0.03664	0.03966	0.04411
Δ	+0.01127	+0.00928	−0.00059	−0.00768	−0.01197

前節と同じ向きで、**倍ちかく大きい。**生の指数は $q_X = -0.498$、$q_Y = +0.486$（前節は -0.247、$+0.272$）。床が下がったぶん ∓ 2 の側へ倍近く動いたが、まだ ∓ 0.5 である。**床がある限り生の指数は意味を持たない。**　器械の検査も同時に走らせた　——　$a = 1$　では楕円と円は同じ計算であり、**30/30 で ε が浮動小数点まで一致**した。

床は下がった。$F:\ 0.03647 \to 0.02730$（$\rho \times 4$）、k/ε は $0.123 \to$ **0.232**。**P145 前半合格。** だが下がり方が問題である。

同じ　$\rho = 1428000$・同じ点集合の円い光円錐で歩数だけを変えると、$\varepsilon_{\text{floor}}$　は　$T = 14$　で　0.03326 ± 0.00018、$T = 22$　で　0.03580 ± 0.00022、比 $\mathbf{1.076 \pm 0.009}$（予言 P152 は 0.55–0.80）。

床は歩数では下がらない。むしろ 7.6% 増える。F73 を踏んだ。　離散化の曖昧さは「面を置く場所の一回きりの誤差」ではなく、**一歩ごとに溜まる**。効くのは ρ だけで、しかも

---

s はどこまで決まったか。宣言どおりの主推定量である同時当てはめ $\varepsilon = F + k\,a^{\mp s}$ で $s = \mathbf{1.62}$ $[0.77,\ 2.53]$、幅 1.76（$\chi^2 = 17.6/7$）。**K317 の結果を見たあとに作った**床の要らない推定量　$\delta_X = \varepsilon_X^{\text{楕円}} - \varepsilon_X^{\text{円}} = k(a^{-s} - 1)$　では　$s = \mathbf{2.20}$ $[1.31,\ 3.21]$（$\chi^2 = 13.0/8$）。**後から作ったものだと明記する。**

	前節	本節（同時）	本節（床なし）
s	0.90	**1.62**	**2.20**
95% 区間	$[0.05,\ 2.81]$	$[0.77,\ 2.53]$	$[1.31,\ 3.21]$
幅	2.76	**1.76**	1.90
0 を含むか	**含む**	外す	外す
2 を含むか	含む	含む	含む

宣言 P146 は「幅 1.5 以下、かつ 2 を含む」だった。幅 1.76 で**落第**である。だが内訳は書いておく価値がある。**当たった**: 幅は $2.76 \to 1.76$ に狭まり、区間は 2 を含む（F74 は踏んでいない）。**宣言していなかったが、いちばん大きい変化**: 区間が **0 を外した**。**外れた**: 幅の目標 1.5 に届かず、$s = 2$ を「測った」とは言わない。

前節の $[0.05,\ 2.81]$ は「異方性の指数が 0 でも構わない」と言っていた。本節の区間は言わない。**「異方性は a の何乗かで効いている」が測定になったのは本節が初めてである。** ただし何乗かは、まだ 2 とは言えない。

78-6. 落第した件 ❌

本章は本書でいちばん失敗の多い区間である。まず**前提が壊れた一件**を書く。

K314 落第（F72）。リンクは局所的ではなかった。 宣言 §3 で私はこう書いていた ——「リンクは局所的である。区間の体積が $\frac{\pi}{12}\tau^3$ だから、遠いリンクは指数的に稀だ。」

カットオフ R/τ_{link}	2	3	4	5
取りこぼしたリンクの割合	62.3%	34.0%	12.5%	**1.3%**

1 元あたりのリンクは **33.7 本**（予言 P143 は 2–8 本）。R を伸ばしても 0 にならない。理由はすぐ分かった —— **無限 Minkowski では 1 元あたりのリンク数は発散する。**　リンクの条件は「区間が空」であって、区間はブーストでいくらでも細長くできる。有限の箱では有限だが、箱とともに増える。**私は「区間の体積が小さい」を「区間が空になりにくい」と取り違えていた。**

直し方は、正当化の差し替えである（**走らせる前に、宣言 §8 として書いた**）。私が使う量は**高さ**と **ready 集合**の二つだけである。取りこぼすのは時間的に遠いリンクであり、そのような親は、子が ready の候補になる頃には**とっくに D に入っている**。D は下から上へ進む面だからである。だから証明すべきことは変わる。

> 「全リンクを捕まえる」のではなく、「**取りこぼすリンクは下方集合の前進に効かない**」ことを**直接**確かめる。

K313b 合格。　本測定の幾何（$L = 0.30$、$T_{\text{ext}} = 0.28$、$N = 8996$）で　**25/25**、高さ・前進した集合・ε　のすべてが密な計算と厳密に一致した。**K313c 合格。**　疎表現が ready と宣言した元に D の外の真の祖先が居た回数は **0 回**。**K314b 合格。**　本測定の幾何でのリンクは 1 元あたり 28.8 本。主張しないことも宣言どおりに書いた —— 「リンク集合が正しい」とは言わない。言うのは「高さと ready 集合が厳密に一致した」だけである。残りの落第を並べる。

	内容	種類
K282（一度目）	群交換子を $\Phi^{2}_{-h}\Phi^{1}_{-h}\Phi^{2}_{h}\Phi^{1}_{h}$ の順に組んだ。これは $[X_2, X_1]$ である。$A = 0$ でも相対誤差 2.006 が出て気づいた	自作のバグ
K283（二度）	座標の等時面から前進を始めた（最初の約 10 層が 7–10% 過大）。直しても残った 0.13–0.19 は **すべてショットノイズ**で、合格条件を 1 本ごとの量に課したのが誤りだった（$1/\sqrt{60} = 0.13$）	設計＋宣言の誤り
K284	主仮説を H1（共形連続の残差）に置いた。$A = 0$ ですら H1 は最良でない（0.687 対 0.834）	宣言の誤り
K285	形の違うプロファイルで割る推定量を使い、-3.5 や $+11.4$ が出た	設計の誤り
K286 / P102	ε の比を 1.2–2 と予言 → 実測 1.182	予言の外れ（僅差）
P107 / P110	重み指数を $[-2.6, -1.4]$ と予言 → -1.358。p は密度とともに深くなると予言 → -0.096	予言の外れ
連続の法線流	曲がった初期面からの積分が発散（$\max\lvert f'\rvert = 148$）。デアリアスしていなかった	**自作のバグ**
K289 / K295b	帯の内外の分割。壊れた流れで帯を引き、直しても帯は全残差の 0.8–5.5% しか含まず情報にならない	無効・設計の誤り
$\lambda = 0.05$	変形を小さくすればよいと考えたが $T = 9$ ステップでは推定量が壊れる（$+8.76$ と -3.74）。**密度も上げねばならなかった**	設計の誤り
P112 / P118 / P119	p の λ・A 依存の予言。すべて混合仮説から導き、**向きが逆**だった	予言の外れ
K304 / K306	$\varepsilon \propto a^{q}$ という**乗法モデル**で合格条件を書いた。実際は $\varepsilon_{\text{floor}} + k\,a^{\mp 2}$ の加法構造	宣言の誤り
s の自由な当てはめ	$s \to 0$ で $k \to \infty$ と退化する。区間がグリッド全体になり、2 を含んだのは縮退のせい	設計の誤り
K315	床の T 依存を測る宣言が ρ と T を混ぜていた（走らせる前に K315b へ差し替え）	設計の誤り
P145 後半	k は分解能に依らないと予言 → $\times 1.69$（$0.00509 \to 0.00859$）	予言の外れ
K317 / P147	帰無対照（円い光円錐）で q_X の区間が 0 を外した。偽の k は本物の 12.1%	予言の外れ

節ごとの内訳はこうである。K282–K288（共形）は 10 件中 6 件合格・4 件落第、加えて予言の外れ 2 件と自作のバグ 1 件。K289–K301（指数）は 13 件中 5 件合格・7 件落第・1 件無効、加えて設計の誤り 2 件と自作のバグ 1 件。K302–K311（$2{+}1$）は 10 件中 7 件合格・3 件落第、加えて予言の外れ 2 件と設計の誤り 1 件。K313–K319（疎）は予言の外れ 7 件・設計ミス 1 件・**自作のバグ 0 件**。通算は K198–K319 で較正 **138 件**、失敗 **56 件**（予言の外れ 32・宣言/設計の誤り 18・自作のバグ 6）。

三つ、方法についての教訓が残った。第一。$p = -1.4$　の節で**予言を七つ続けて外した**。うち五つは混合仮説から導いたもので、混合仮説そのものが誤りだった。正解は「Ω が無い場合に測る」という素朴な対照を一度取れば分かる。**七つ外してから対照を取った。順序が逆だった。**

新しい推定量を作ったら、信号が無い場合に何を返すかを先に測る。

第二。$2{+}1$ 次元の節と疎表現の節では、帰無対照と器械の検査を**主測定と同時に**走らせた。**その二節で自作のバグは 0 件だった。** 残った落第はすべて「予言と合格条件の置き方」であり、それは避けようがない ―― 先に書くと決めている以上、外れるのが仕事である。第三。K317 の落第も、同時対照があったからこそ診断できた。円い光円錐では a も b も計算に入らず、a ごとに違うのは乱数の種だけである。別の目的（K315b）で取った $T = 14$ の同じ点集合の測定と比べると、偽の k は $+0.00104 \pm 0.00040$ から $\mathbf{-0.00050 \pm 0.00030}$ へ**符号が反転**した。系統なら反転しない。揺らぎである。**それでも K317 は宣言した合格条件（0 と整合）を満たさなかったので落第に数える。**　最悪を取っても偽の信号は本物の 12% ―― 本物は帰無の 8 倍ある。これが本章で言える強さの上限である。

78-7. 何を主張しないか ⚠️

- $1{+}1$ **次元は共形平坦である。**　ここでの「曲がった背景」は因果構造としては平坦と同一で、違うのは体積要素だけである。$p = -2.01 \pm 0.07$ が高次元でそのまま言えるとは主張しない。
- $p = -2.01$ **は極限値ではない。** $\lambda = 0.08$（$T = 14$ ステップ）が使える最小の変形での値である。$\lambda \to 0$ の極限は取れていない。
- **バイアス補正は 1 次である。** $A = 0$ で測ったバイアスを $A \neq 0$ に外挿している。$1/A$ 則が成り立つことが根拠だが、厳密ではない。誤差 ± 0.07 は 5 点の標準偏差であって系統誤差を含まない（同じ条件で -2.186 と -2.479 が出たことがある）。実効的な不確かさはこれより大きい。
- $2{+}1$ **次元で指数** -2 **を測ったとは言わない。** s の区間は $[0.77,\, 2.53]$ と $[1.31,\, 3.21]$ である。**2 を含むことと 2 であることは違う。**
- k **が連続の値に達したとも言わない。** $k/k_{\mathrm{pred}} = 0.36$ である。残り 0.64 が離散化なのか有限変形なのか別の何かなのかは測っていない。
- **床の正体は分かっていない。** 分かったのは「歩数では下がらない」「$\rho^{-0.21}$ でしか下がらない」の二つだけである。
- **定数の** a, b **は座標変換で消せる。** $x' = ax$、$y' = by$ で標準 Minkowski になる。**曲率のある時空は測っていない。** 測ったのは「与えられた座標系で異方性が因果集合に届くか、その経路はどこか」である。
- $\vec{M}$ **を直接測ってはいない。** $D(\vec{M})$ はラベルの無い因果集合には作用しない。測ったのは残差の**形と重み**だけである。q^{ab} の非対角成分も測っていない。対角の二成分だけである。
- **疎表現の厳密性は主張しない。** 確かめたのは「高さと ready 集合が、この幾何・この標本で厳密に一致した」ことだけである。
- **連続側の数値積分は** $2{+}1$ **次元では作っていない。** k_{pred} は二次の解析式である。λ 依存は p については測ったが k については測っていない。
- **古典・量子化なし・周期空間**（円筒とトーラス）はフレームを選んでいる。

78-8. 何が残ったか

物差しはできた。そして計量のどの部分を訊くかで、それを運ぶ側が入れ替わることが分かった。

> $1{+}1$ 次元では共形因子を**体積（元の数）**が運び、$2{+}1$ 次元では異方性を**順序（光円錐）**が運ぶ。
> 「order + number = geometry」は、**計量のどの部分を訊くかで担当が入れ替わる。**
>
> 前者では GR の $q^{xx} = \Omega^{-2}$ が数として出た。後者では向きと機構だけが出た。
> 隔てているのは離散性ではなく、**等方な離散化の床**という分解能の壁である。

第 73 章に書いた総括 —— **離散性は一度も障害にならなかった** —— は、本章でも破られていない。$1{+}1$ 次元で -2 を返したのは離散的な因果集合である。$2{+}1$ 次元で指数を返せなかったのも離散性のせいではなく、床が $\rho^{-0.21}$ でしか下がらないという**費用**のせいである。

そして床を　ρ　で攻める道は行き止まりである。残るのは、床を消す観測量を作るか、別の予測を当てにいくかである。k　が本当に連続の量なら $k \propto \lambda$ でなければならない —— それは安く、独立で、本章で外した予言（P145 後半）に直接答える。次章はそれを測る。

第 79 章　λ を振る — 反転する異方性と、指数の正体 ⚠️🆕

— 連続側にも同じ反転がある。そして指数は $r = \lambda/A_0$ だけで決まる

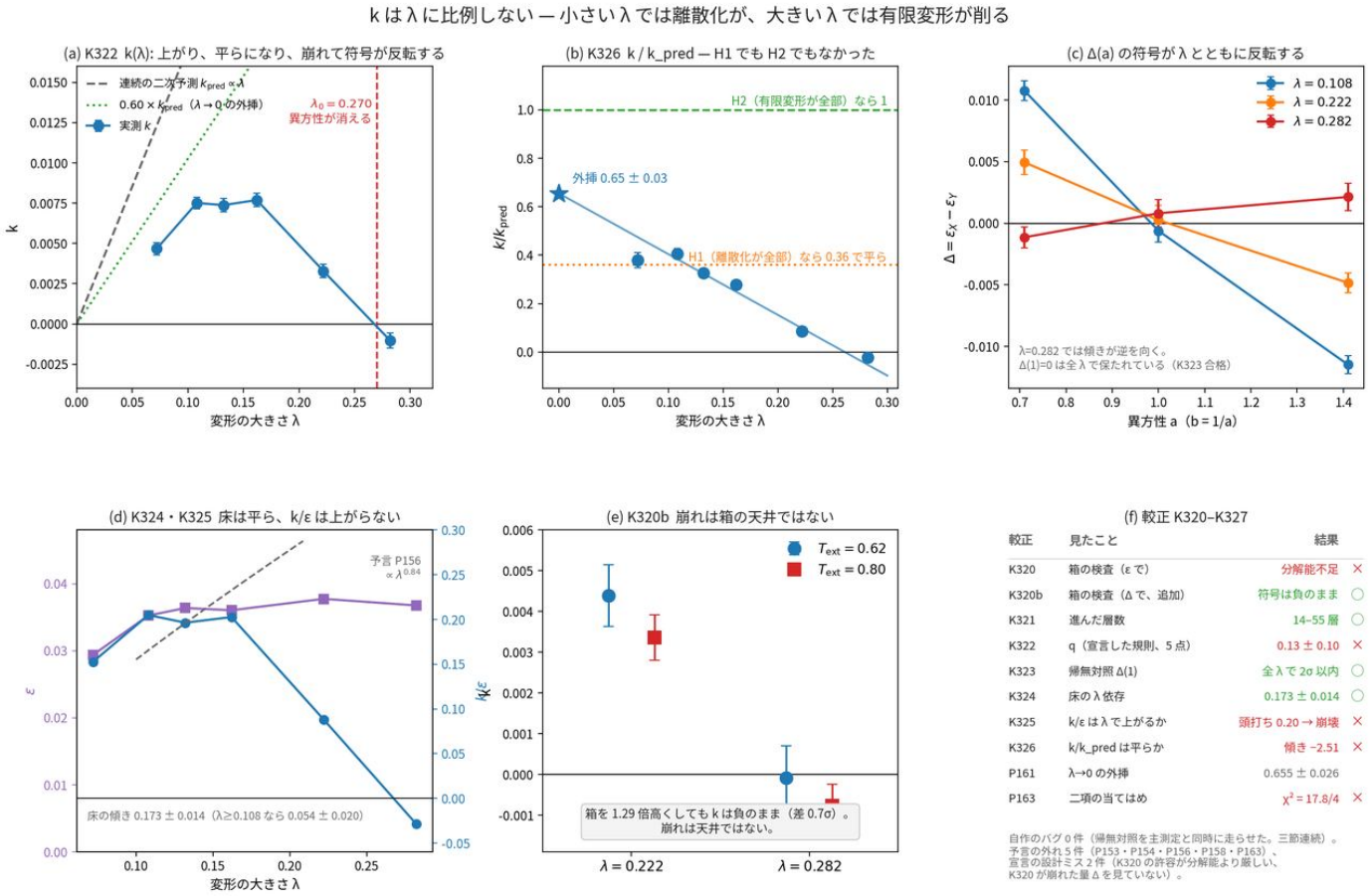


図 79-1. (a) K322 $k(\lambda)$。上がり、平らになり、$\lambda_0 = 0.270$ で 0 を横切る。破線は連続の二次予測 $k_{\text{pred}} \propto \lambda$。(b) K326 k/k_{pred}。H1（離散化が全部、傾き 0・切片 0.36）でも H2（有限変形が全部、切片 1）でもない。$\lambda \to 0$ の外挿は 0.65 ± 0.03。(c) $\Delta(a) = \varepsilon_X - \varepsilon_Y$ の傾きが $\lambda = 0.282$ で逆を向く。$\Delta(1) = 0$ は全 λ で保たれている。(d) K324・K325 床は平ら、k/ε は頭打ちののち崩れる。(e) K320b 箱を 1.29 倍高くしても k は負のまま（0.7σ）。(f) 較正 K320–K327。

前章までで、異方的な計量 $q^{ab} = \text{diag}(a^{-2}, b^{-2})$ を因果集合に入れると ε に a 依存が出ること、そしてその大きさ k が連続の二次予測の 0.36 しか出ないことが分かっていた。本章はその不足分の正体を追う。振るのは変形の大きさ λ である。

79-1. 問い — なぜ λ を振るのか

前章で予言 P145 の後半が外れた。「k は連続の量なので分解能に依らない」と書いたのに、ρ を 4 倍にしたら k は $\times 1.69$ 増えた。連続の二次予測に対する比は $0.216 \to 0.359$ に動いた。

連続の見積もりは $k_{\text{pred}} = \lambda\, c_1 A_0 (2\pi/L)^2/4 = 0.1711\,\lambda \propto \lambda$ である。だから **k が λ に比例するかどうかは、k が二次の ADM 交換子から来ているかどうかの独立な検査になる。** 同時に、不足分 $1 - 0.36$ が離散化（仮説 H1）なのか有限変形（仮説 H2）なのかを分ける。

走らせる前に宣言を書いた。 `K_declared_lambda.md` の §1–§8 は数値を一つも見る前に、§9 は主測定を見たあと・追加測定を走らせる前に確定した。以下、同じ規律を四つの宣言文書（`_lambda`・`_lam0`・`_a0`・`_r2`）すべてで守っている。

79-2. 道具

$\rho = 1428000$、$a \in \{0.71, 1.0, 1.41\}$、$b = 1/a$、各 30 本。$\lambda$ **はリンクに影響しない**ので、1 本の実現につきリンクを一度だけ作り、六つの λ を全部その上で走らせた。箱は $T_{\text{ext}} = 0.62$（$N = 79682$、最大高さ 103 層）。k は床を含まない量 $\Delta(a) = \varepsilon_X - \varepsilon_Y = k\,(a^{-2} - a^2)$ から取る。$a = 1$ は $\Delta = 0$ でなければならず、**帰無対照として主測定と同時に走らせた。**

器械を先に確かめた。 進んだ層数は $\lambda = 0.072$ で 14.3 層、$\lambda = 0.282$ で 54.9 層（**K321 合格**）。帰無対照 $\Delta(1)$ は六つの λ すべてで 2σ 以内（$1.5, 0.7, 1.0, 0.3, 0.2, 0.7\sigma$）で、**符号が反転した $\lambda = 0.282$ でも $\Delta(1) = +0.00081 \pm 0.00110$ である（K323 合格、P157）**。反転は $a \neq 1$ でだけ起きている。

79-3. k は λ に比例しない ❌ P153 → F76

T	12	18	22	27	37	47
λ	0.0720	0.1080	0.1320	0.1620	0.2220	0.2819
k	0.00468	0.00751	0.00738	0.00770	0.00329	**−0.00103**
$\pm$	0.00038	0.00037	0.00041	0.00042	0.00043	0.00046
k/σ	12.3	20.4	18.1	18.3	7.7	-2.3

宣言した規則（「k が 3σ 以上で正である最大の連続区間」）は 5 点を選ぶ。そこで $q = \mathbf{0.13 \pm 0.10}$（予言 P153 は 1.00 ± 0.15）。**F76 を踏んだ。** $\lambda = 0.108$–0.162 の 3 点だけを見ると傾きは 0.05 ± 0.18 ——**そこで k は完全に平らである。**比例どころか依存が無い。

箱の天井ではない。 T_{ext} を 1.29 倍にしても $\lambda = 0.282$ の k は $-0.00009 \pm 0.00079 \to -0.00076 \pm 0.00053$ で負のまま（差 0.7σ、**K320b 合格・P160**）。

> 崩れは箱の天井ではない。$\lambda_0 = 0.270$ **で異方性そのものが消えて反転する。**

H1 でも　H2 でもなかった（K326 落第、P154）。　k/k_{pred} は $0.380, 0.407, 0.327, 0.278, 0.087, -0.021$。$\lambda$ の一次で当てはめると切片 0.655 ± 0.026、傾き -2.51 ± 0.15。H1（傾き 0・切片 0.36）は傾きが 17σ で外れ、H2（切片 1）は切片が 13σ で外れる。**答えは「両方」だった。**

> $\lambda \to 0$ でも k は連続の二次予測の 0.5–0.7 しか出ない。これが**離散化**である。
> 働かせている $\lambda = 0.132$ では 0.33 まで落ちる。差が**有限変形**である。
> 前章で「不足分は全部離散化」と読んだのは**誤りだった。訂正する。**

床の λ 依存は傾き 0.173 ± 0.014（**K324 合格、P155**。前章 K315b の二点外挿がそのまま当たった）。しかし k/ε は $\lambda \simeq 0.11$–0.16 で頭打ちの 0.20 になり、そのあと崩れる（**K325 落第、P156**）。**前章で ρ の道が行き止まりだと分かり、本節で λ の道も行き止まりだと分かった。**

崩れの形も書けなかった。$k = k_1\lambda(1 - \lambda/\lambda_0)$ の当てはめは $\chi^2 = 17.8/4$ で落第（**F81**）、残差は $-2.6, +1.5, +0.3, +1.8, -2.2, +0.7\sigma$ の系統的な波である。**それでも λ_0 だけは頑健で、どの当てはめでも 0.270 ± 0.006 だった。**

79-4. λ_0 の正体 — 連続でも反転する ✅ P164/P173

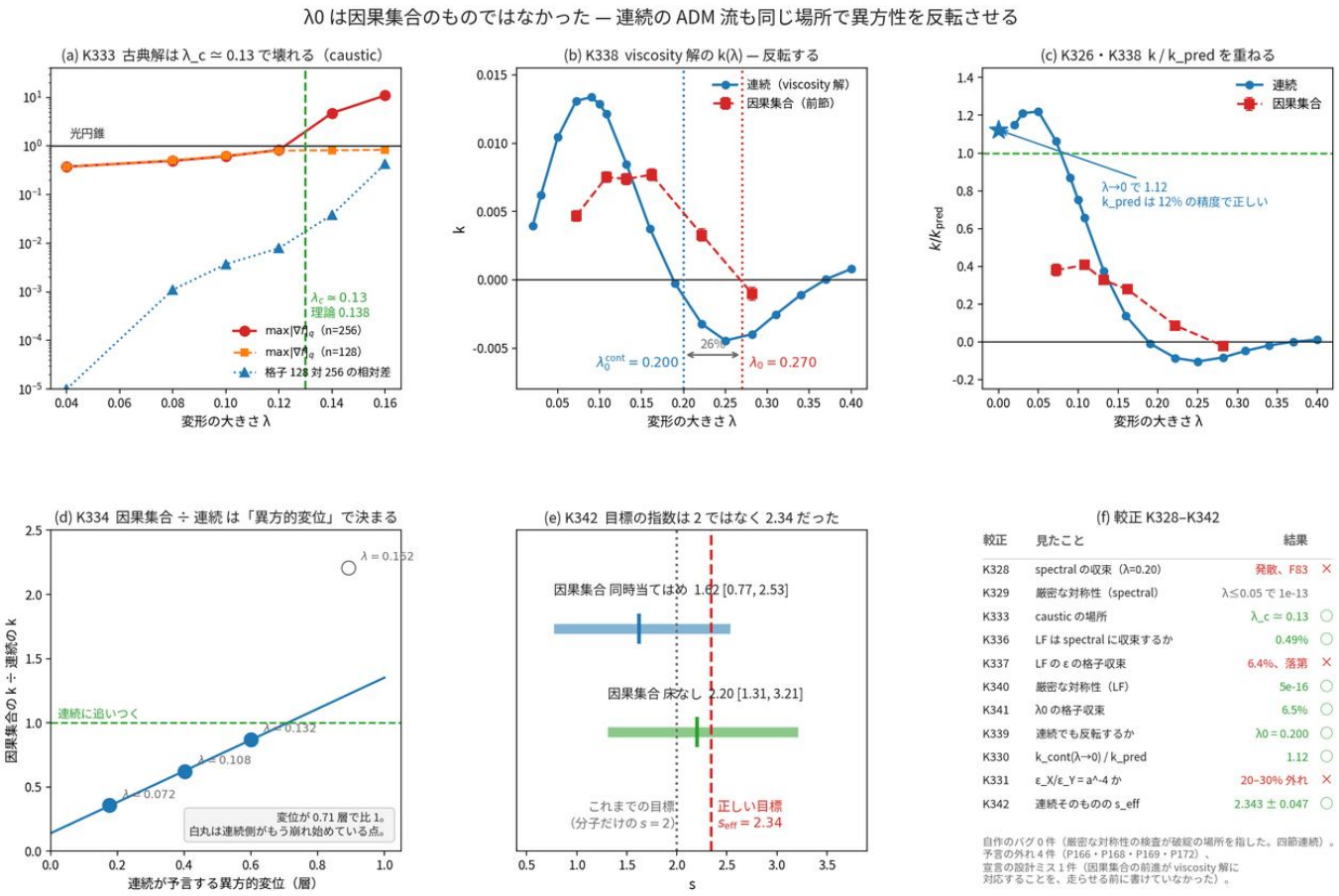


図 79-2. (a) K333 古典解は $\lambda_c \simeq 0.13$ で $\max|\nabla f|_q$ が光円錐 1 を越えて発散する（caustic）。(b) K338 viscosity 解の $k(\lambda)$。$\lambda_0^{\rm cont} = 0.200$ で反転し、$\lambda \simeq 0.37$ でもう一度正に戻る。因果集合の 0.270 と 26%。(c) $k/k_{\rm pred}$ を重ねる。連続の $\lambda \to 0$ は 1.12。(d) K334 因果集合／連続 は「異方的変位（層）」の一次に乗り、比 1 になるのは 0.71 層。(e) K342 連続そのものの $s_{\rm eff} = 2.343 \pm 0.047$。(f) 較正 K328–K342。

問いは単純である。連続の ADM 流でも反転するか。 起きるなら λ_0 は流れそのものの性質、起きないなら離散化の産物である。

計量 $ds^2 = -dt^2 + a^2dx^2 + b^2dy^2$（$ab = 1$）、曲面を $t = f(x, y)$ に取ると $\partial_\lambda f = N\sqrt{1 - q^{ab}\partial_a f\,\partial_b f}$。**因果集合の λ と連続の λ は同じものである**（Bresenham 日程で T ステップ進めた固有時間の進みが $N(x)\lambda$）。L・c_0・c_1・A_0 と緩和 8 ステップまで因果集合に揃えた。

器械は厳密な恒等式で検査した。 $x \leftrightarrow y$ の入れ替えから $\varepsilon_Y(a) = \varepsilon_X(1/a)$ が**厳密に**成り立たねばならない。spectral で 10^{-13}、LF で 4.7×10^{-16}（**K329・K340 合格**）。**そしてこの検査が破綻の場所を指した。** K329 は $\lambda = 0.20$ で 4×10^{-3} に悪化する。**バグではない。caustic である。**

古典解は届かない ❌ P168・P169 → F83・F84

λ	**0.04**	**0.08**	**0.10**	**0.12**	**0.14**	**0.16**
格子 128 対 256 の相対差	0.00%	0.11%	0.37%	0.79%	**3.9%**	**42.7%**
$\max\|\nabla f\|_q$	0.374	0.496	0.615	0.824	**4.76**	**10.9**

$\lambda_c \simeq 0.13 \pm 0.01$ で勾配が光円錐 1 を越えて発散する。**私の見積もり $\lambda_c \simeq 0.40$ は外れた。lapse の一階微分しか見ていなかった。** 正しくは法線の焦点距離で決まる。平坦から流すと $f_{xx} = \lambda N'' = -52.6\lambda\cos$ で、焦点距離 $1/|f_{xx}|$ が進んだ距離 λ に等しくなるのは $\lambda = 1/\sqrt{52.6} = 0.138$。**実測 0.13 と合う。** $\lambda_c < \lambda_0 = 0.270$ ——古典解では反転に届かない（**F84**）。

設計ミスを一つ認める — 対応するのは viscosity 解である

Bresenham 日程のもとで T ステップ後の下方集合は $D_T = \{e :\ \max_{D_0\text{ からの鎖}} \sum_i N(x_i)^{-1} \le T\}$、すなわち「初期面から e への因果曲線に沿った $\int d\tau/N$ の**最大値**が λ 以下」である。最大値に対する条件だから共通部分であり、**下包絡**になる。そして D はつねに下方集合なので**原理的に折り返**

せない。これは viscosity 解（第一到達解）の性質そのものである。第 71 章で「CA の下方集合前進作用素は厳密に可換」と書いた、その同じ構造がここに効いている。

> 比べるべき連続の対象は**古典のスペクトル流ではなく viscosity 解**である。

この対応は走らせる前に書けたはずだった。書けていなかった。宣言の設計ミスとして数える。　単調な差分（local Lax–Friedrichs）は viscosity 解に収束する。caustic より下の $\lambda = 0.10$ で LF は spectral に一次収束し、$n = 600$ で差 0.49%（**K336 合格、P171**）。

主測定

λ	**0.020**	**0.090**	**0.132**	**0.190**	**0.222**	**0.250**	**0.340**	**0.400**
k_{cont}	$+0.00393$	$+0.01337$	$+0.00847$	-0.00028	-0.00325	-0.00445	-0.00110	$+0.00079$

> **連続でも反転する。** $\lambda_0^{\mathrm{cont}} = 0.200$（Richardson 外挿 0.212）。
> 因果集合の 0.270 との差は 26%（外挿なら 21%）で、宣言した 30% 以内。
> さらに k_{cont} は $\lambda \simeq 0.37$ で**もう一度 0 を横切って正に戻る**。振動する。

λ_0 そのものの格子収束も確かめた（$n = 150$ で 0.1879、$n = 300$ で 0.2001、差 6.5%、**K341 合格・P176**）。**λ_0 は因果集合のものではない。連続の ADM 流の性質である。**

k_{pred} 自身も検定に通った。$k_{\mathrm{cont}}(\lambda \to 0)/\lambda = 0.1920$ 対 k_{pred} の 0.1711、比 1.12（**K330 合格、P165**）。正しい基準で読み直すと前節の外挿 0.655 は 0.58 になり、**離散化による欠損は約 42%** である（前節は 35% と書いた。12% ぶん訂正する）。

因果集合 ÷ 連続 は「異方的変位」で決まる ✅ K334

同じ λ で両者の k を割り、「連続が予言する異方的変位（層）」$= k_{\mathrm{pred}} \times$（進んだ層数）を横軸に取る。

λ	**0.072**	**0.108**	**0.132**	**0.162**
異方的変位（層）	0.18	0.40	0.60	0.89
因果集合 k / 連続 k	**0.357**	**0.619**	**0.871**	2.209

最初の 3 点は変位の一次にきれいに乗る。比 $= 0.140 + 1.212 \times$ (変位／層)、比 1 になるのは **0.71 層**。4 点目は使わない。そこでは**連続側がすでに崩れ始めていて、因果集合はまだ崩れていない**。比が 1 を超えるのは因果集合が優れているからではなく、崩れが遅れているからである。

> 異方的変位が 1 層より薄いあいだ、因果集合は連続の k を**変位に比例して取りこぼす。**

79-5. 指数の正体 — $r = \lambda/A_0$ だけで決まる。そして前節の「2.34 が目標」を訂正する

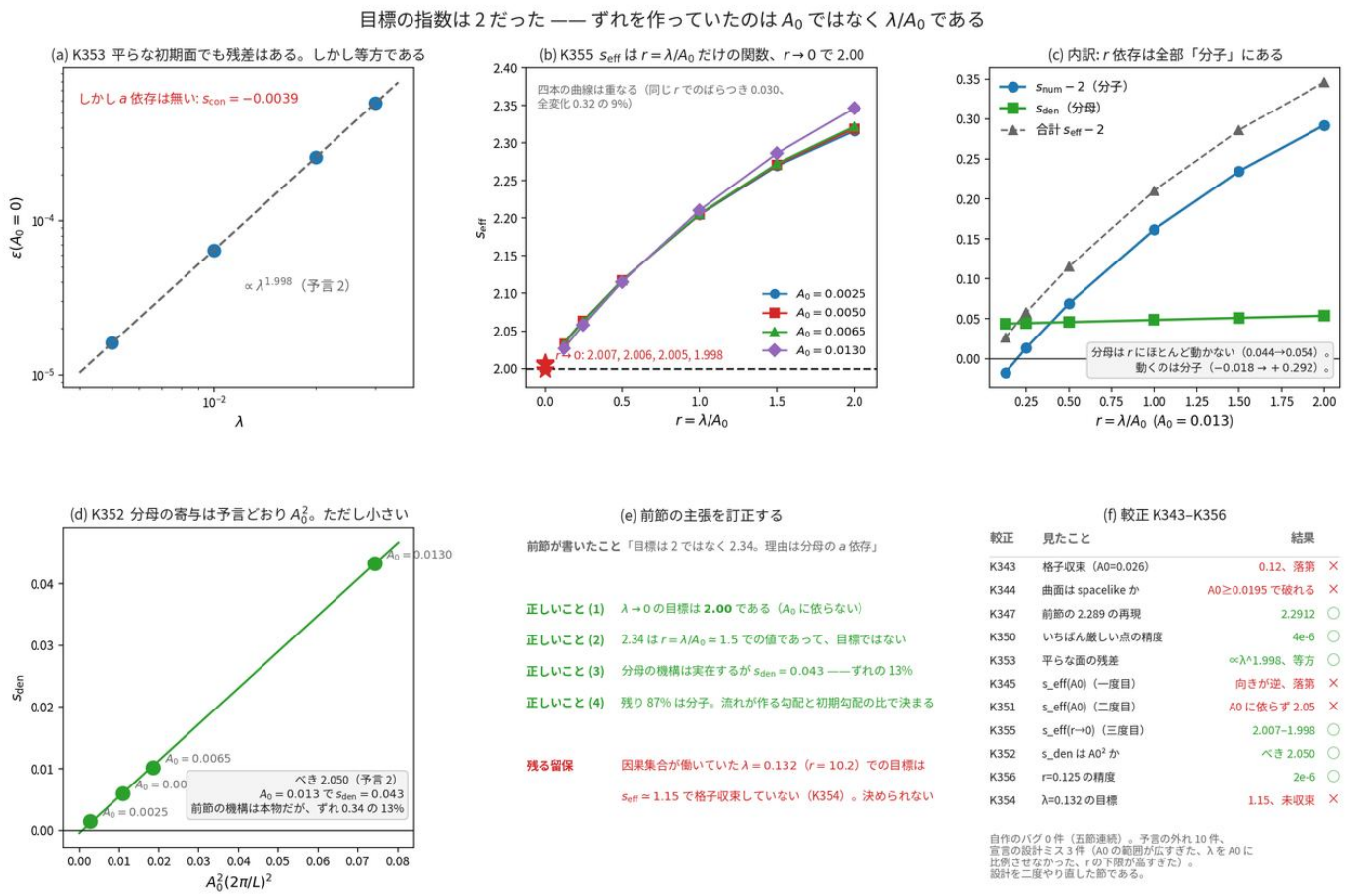


図 79-3. (a) K353 平らな初期面（$A_0 = 0$）でも残差はあり $\propto \lambda^{1.998}$。しかし a 依存は無い（$s_{\rm con} = -0.0039$）。(b) K355 四つの A_0 の曲線が $r = \lambda/A_0$ で重なる。$r \to 0$ の外挿は 2.007, 2.006, 2.005, 1.998。(c) 内訳。動くのは分子（$-0.018 \to +0.292$）で、分母はほとんど動かない（$0.044 \to 0.054$）。(d) K352 $s_{\rm den}$ はべき 2.050 で A_0^2 に乗る。ただし小さい。(e) 前節の主張の訂正。(f) 較正 K343–K356。

前節で私はこう書いた。「連続そのものが返す指数は $s_{\rm eff} = 2.343 \pm 0.047$ であって 2 ではない。理由は ε が比であり、**分母の『進んだ体積』$\int N\sqrt{1 - q^{ab} f_a f_b}$ が a に依る**からである」。その説明が正しければ $A_0 \to 0$ で $s_{\rm eff} \to 2$ に戻るはずである。**測った。**

設計を二度やり直した

一度目、$A_0 \in \{0.0025, \ldots, 0.026\}$ で走らせたら $\max|\nabla f|_q$ は $A_0 = 0.0195$ で 1.11、0.026 で 1.52 ——**曲面が spacelike でなくなっていた**（K344 落第）。格子収束も $A_0 = 0.026$ で 0.119 崩れた（K343 落第）。同じ一度目で、λ を全 A_0 で共通に固定していた。すると $\lambda \to 0$ の $s_{\rm eff}$ は $A_0 = 0.0025$ で 2.59、0.013 で 2.14 ——**予言と向きが逆**になった（K345・K346 落第）。理由はすぐ分かった。**曲面の勾配の源は二つある。** 初期面の $A_0(2\pi/L)$ と、**流れ自身が作る** $\lambda c_1(2\pi/L)$ である。$\lambda = 0.02$ で後者は 0.050、$A_0 = 0.0025$ で前者は 0.052 ——同じ大きさ。A_0 を小さくするほど流れの側が支配する。

> λ は A_0 に比例させなければならなかった。**固定したのは私の設計ミスである。**

二度目は $\lambda = rA_0$、$r \in \{0.5, 1, 1.5, 2\}$ でやり直したが、$r \to 0$ の外挿が 2.05–2.06 で止まった。差が 0.0866, 0.0649, 0.0466 と減っており、**一次外挿が偏っていた**（K351 落第）。三度目で r を 0.125 まで下げ（16 倍の範囲）、決着した。

主測定 — s_{eff} は r だけの関数

$r=\lambda/A_0$	$A_0=0.0025$	$A_0=0.0050$	$A_0=0.0065$	$A_0=0.0130$	**ばらつき**
0.125	2.0338	2.0330	2.0323	2.0263	0.0074
0.250	2.0641	2.0635	2.0629	2.0582	0.0059
0.500	2.1176	2.1174	2.1171	2.1152	0.0024
1.000	2.2042	2.2049	2.2054	2.2103	0.0061
1.500	2.2691	2.2709	2.2725	2.2860	0.0169
2.000	2.3157	2.3189	2.3218	2.3460	0.0302

A_0 を 5.2 倍振っても四本の曲線は重なる。 同じ r でのばらつきは最大 0.030、s_{eff} の全変化 0.32 の 9% でしかない。$r\to 0$ に外挿すると $2.0070,\ 2.0060,\ 2.0051,\ 1.9978$（3 パラメータの当てはめなら 1.9987–1.9919）。

> **前節で「2.34 が目標」と書いたのは誤りである。訂正する。**
> **(1) 目標は 2** である。$\lambda\to 0$ で $s_{\mathrm{eff}}=\mathbf{2.00}$、$A_0$ に依らない。
> **(2)** 2.34 は $r\simeq 1.5$–2 での**推定量の値**であって、目標ではない。
> **(3) 前節が挙げた理由（分母の a 依存）は実在するが、ずれの 13% でしかない。**
> **(4) 残り** 87% は分子で、流れが作る勾配と初期面の勾配の比 r が決めている。

内訳は明快である。$A_0=0.013$ で分けると s_{den} は r でほとんど動かず（$+0.044\to+0.054$）、$s_{\mathrm{num}}-2$ が動く（$-0.018\to+0.292$）。そして s_{den} は予言どおり $A_0^{2.050}$ に乗る（**K352 合格**）。**機構は本物だが、小さかった。**

平らな初期面が残す汚染は完全に等方だった。 $A_0=0$ でも $\varepsilon\propto\lambda^{1.998}$ の残差があるが、a 依存は $s_{\mathrm{con}}=-0.0039$ ——ゼロである（**K353 合格、P191**）。等方（指数 0）の項を異方（指数 2）の項に足せば指数は下がるはずなのに、実測は上がる。$|f_A-f_B|$ の絶対値の中で二つの寄与が混ざるので単純な加重平均にならない。**そう書いておくにとどめる。説明できていない。**

そして重い留保が一つ残った。 因果集合が働いていたのは $A_0=0.013$、$\lambda=0.132$、すなわち $r=10.2$ ——調べた範囲の 5 倍外、$\lambda_c=0.13$ の直上である。viscosity 解で計算すると s_{eff} は $n=150,300,600$ で $0.985,\ 1.082,\ 1.153$ と上がり続け、**収束しない**（K354 落第、P192）。

> 因果集合の働いていた点での目標は**決められない**。ただし 2.34 でも 2 でもなく、**1 の桁**である。

因果集合は、目標の分かっていない場所で測っていた。

79-6. 目標の分かっている場所で測る ✅ P200

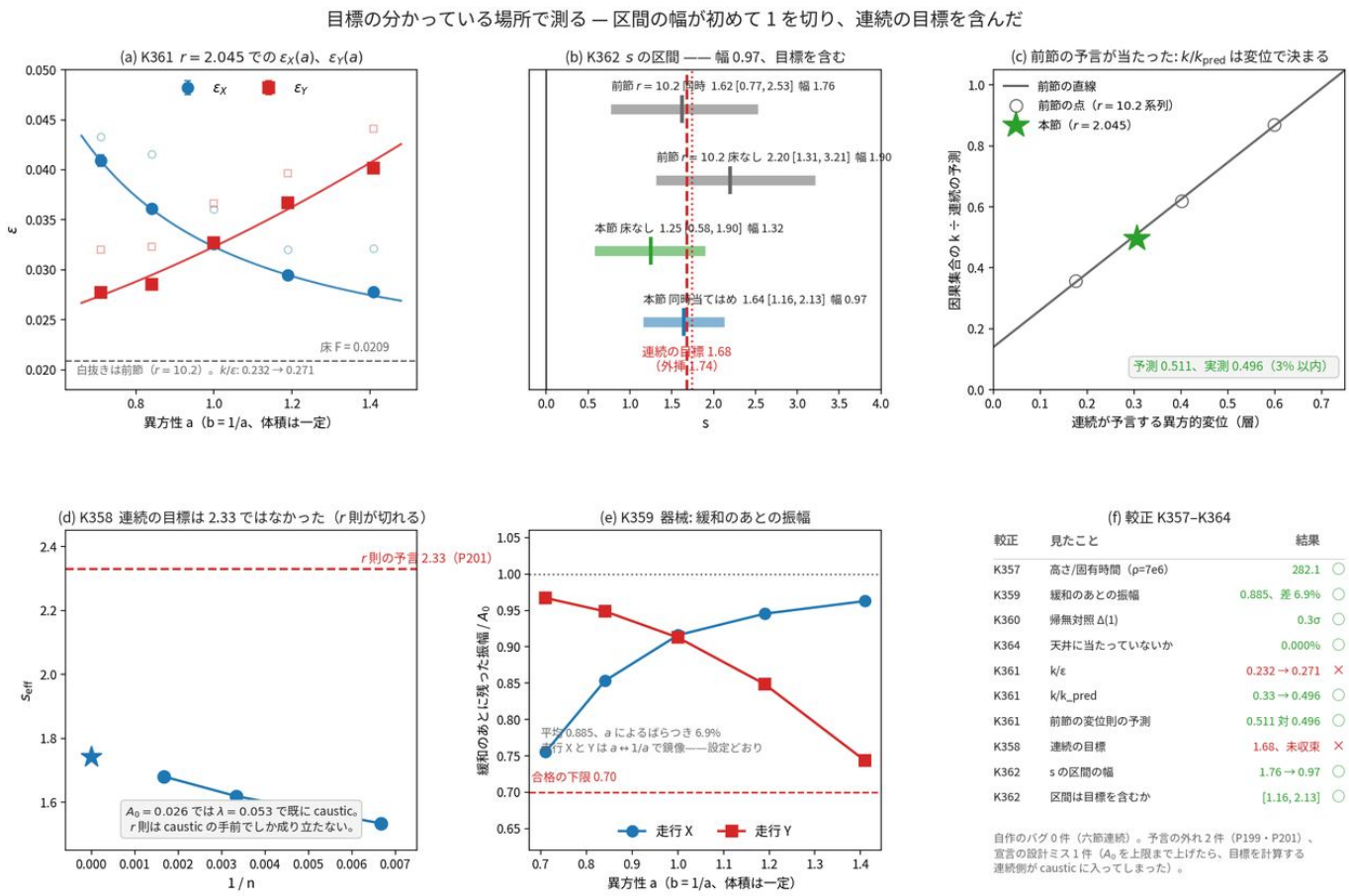


図 79-4. (a) K361 $r = 2.045$ での $\varepsilon_X(a)$、$\varepsilon_Y(a)$。白抜きは前節（$r = 10.2$）。床は $0.0273 \to 0.0209$。(b) K362 s の区間。幅が $1.76 \to 0.97$ に縮み、連続の目標 1.68（外挿 1.74）を含む。(c) 前節の変位則の予言 0.511 に対し実測 0.496。(d) K358 連続の目標は 2.33 ではなかった。$A_0 = 0.026$ では $\lambda = 0.053$ で既に caustic に入る。(e) K359 緩和のあとの振幅。走行 X と Y は $a \leftrightarrow 1/a$ で鏡像。(f) 較正 K357–K364。

$k/\varepsilon \propto A_0^2$（$r$ 固定）なので A_0 を上げる。$a = 0.71$ で spacelike を保つ条件 $A_0(1 + 2c_1)(2\pi/L)/0.71 < 1$ から $A_0 < 0.0273$。**$A_0 = 0.026$、$\lambda = 0.052$ を選んだ。** λ が小さいので Bresenham 量子化が粗くなる。$T = 15$ を確保するため ρ を 7.0×10^6（4.9 倍）に上げた。実効 $\lambda = 0.05318$、実効 $r = 2.045$、$N = 157500$、a は 5 点、各 25 本。

費用の実測でひとつ削った。 リンク構築は $N = 176400$ で 200 秒（N の 4.9 倍に対して 10.5 倍――キャッシュのぶん超線形）。宣言の 30 本では 4.6 時間になるので 25 本に減らし、T_{ext} も $0.28 \to 0.25$ にした。**走らせる前に §10 として書いた。** 実測 3.4 時間。

器械は三つとも主測定と同時に走らせて合格した。 高さ／固有時間 $= 282.1$（予言 288 ± 12、K357）。前進した集合の元で箱の上端 5% に入るものは **0.0000%**（K364）。帰無対照 $\Delta(1) = -0.00014 \pm 0.00055$ ――0.3σ（K360）。いちばん心配だった緩和の振幅も残存率 0.885、a によるばらつき 6.9%（K359）で、走行 X と Y は $a \leftrightarrow 1/a$ で完全に鏡像だった。

a	**0.71**	**0.84**	**1.00**	**1.19**	**1.41**
ε_X	0.04091	0.03609	0.03256	0.02948	0.02779
ε_Y	0.02775	0.02856	0.03270	0.03669	0.04015
Δ	$+0.01316$	$+0.00754$	$\mathbf{-0.00014}$	-0.00721	-0.01236
$\pm$	0.00070	0.00048	0.00055	0.00056	0.00057

同時当てはめ $\varepsilon = F + k\,a^{\mp s}$ から

$$s = \mathbf{1.64}, \quad 95\%\text{ 区間 } [1.16,\ 2.13], \quad \text{幅 } \mathbf{0.97}, \quad F = 0.0209,\ \chi^2 = 22.1/7$$

	測定値	幅	目標 1.68
前節 $r = 10.2$ 同時	$1.62\ [0.77,\ 2.53]$	1.76	目標が未定
前節 $r = 10.2$ 床なし	$2.20\ [1.31,\ 3.21]$	1.90	目標が未定
本節 $r = 2.045$ 同時	$\mathbf{1.64\ [1.16,\ 2.13]}$	$\mathbf{0.97}$	**含む**
本節 $r = 2.045$ 床なし	$1.25\ [0.58,\ 1.90]$	1.32	含む

幅が初めて 1 を切り（0.97）、しかも連続の目標を含んだ。
点推定 1.64 は目標 1.68 の 2.4% 以内である。
ただしこれは「$s = 2$ を測った」ではない。測ったのは
「この設定で連続が返すはずの指数を、因果集合も返す」である。

そして本節でいちばん強い結果は、実は s ではない。 前節（K334）の変位則を、ρ も A_0 も λ も違う設定に当てはめる。進んだ層数 16.8、$k_{\mathrm{pred}} = 0.01819$ なので変位は 0.306 層、式は 0.511 を予言する。

実測 $k/k_{\mathrm{pred}} = \mathbf{0.496}$　　（予言 0.511、差 3%）**節をまたいだ定量予言が初めて当たった。**

前節ではこれを「数値を見たあとに作った解釈」と断って書いた。**本節でそれが予言として当たった。離散性は障害ではなく、その欠損は一本の直線で予言できる量だった。**

79-7. 落第した 21 件 ❌

本章は本書でもっとも設計をやり直した章である。 理由ははっきりしている。測ろうとした量が、測定の設定が作る別の効果より小さかった。**小さい効果を測るには、それより大きい効果を先に殺さなければならない。**

	落ちたもの	何を誤ったか
K320 ❌ P158	箱の検査（ε、10 本）	合格条件「3% 以内」が**検査自身の分解能より厳しかった**。実際は 1.5σ／1.3σ で有意差なし
設計ミス	K320 が見ていた量	ε は床が支配して Δ の 5 倍ある。**崩れた量 Δ を見ていなかった**。K320b を追加宣言
K322 ❌ P153 → F76	$q = 1.00 \pm 0.15$	0.13 ± 0.10。k は λ に比例しない
K325 ❌ P156	$k/\varepsilon \propto \lambda^{0.84}$	頭打ち 0.20 ののち崩壊。λ の道も行き止まり
K326 ❌ P154 → F79	k/k_{pred} は平ら	傾き -2.51 ± 0.15。H1 も H2 も外れた
P163 ❌ → F81	$k = k_1\lambda(1-\lambda/\lambda_0)$	$\chi^2 = 17.8/4$。指数を自由にしても改善しない
数え違い	規則が選ぶ点数	§9.3 で 4 点と書いた。正しくは 5 点。**規則は変えず数え直して判定した**
K328 ❌ P169 → F83	spectral の $\lambda = 0.20$ 収束	発散。caustic である
P168 ❌	$\lambda_c \simeq 0.40$	実測　　0.13。**lapse　　の一階微分しか見ていなかった**　　。正しくは焦点距離 $1/\sqrt{52.6} = 0.138$
設計ミス	viscosity 解との対応	**因果集合の下方集合前進が viscosity 解に対応することを、走らせる前に書けていなかった**
K337 ❌ P172	LF の ε の格子収束	6.4%。信用するのは k と λ_0 だけにした
K331 ❌ P166	$\varepsilon_X/\varepsilon_Y = a^{-4}$	20–30% 外れ
K344 ❌ P183	曲面は spacelike か	$A_0 \geq 0.0195$ で破れる。**A_0 の範囲を広く取りすぎた**
K343 ❌ P185	格子収束（$A_0 = 0.026$）	0.119
K345・K346 ❌ P179–P181	$s_{\mathrm{eff}}(A_0)$（一度目）	**λ を A_0 に対して固定してしまった**。流れの作る勾配が支配して向きが逆に
K351 ❌ P188・P189	$s_{\mathrm{eff}}(A_0)$（二度目）	**r の下限を高く取りすぎた**。一次外挿が偏り 2.05 で止まる
K355 ❌ P193	A_0^2 に乗る残差	**そもそも存在しない**（$\lvert s-2\rvert \leq 0.008$）。P194 は合格
K354 ❌ P192	$r = 10.2$　での目標　2.3–2.7	1.15 付近で**向きが逆**、しかも $n = 600$ でも未収束
K361 ❌ P199 → F97	$k/\varepsilon \geq 0.35$	0.271。床の ρ 依存を**二点の傾き**で見積もった。実効指数は -0.21 でなく -0.167
K358 ❌ P201	連続の目標 2.33 ± 0.10	1.68（外挿 1.74）、未収束
設計ミス	caustic の中で測った	k/ε を最大にするため A_0 を spacelike の上限まで上げた。**その上限は caustic の閾値とほぼ同じ場所にあった**

自作のバグ　0　件。　帰無対照・厳密な対称性・格子と刻みの二重の収束検査を、いずれも主測定と同時に走らせた。**これで六節連続でバグ　0　である。**

累計: 較正 **182 件**（K198–K364）、失敗 **85 件**（予言の外れ 53／宣言の設計ミス 26／自作のバグ 6）。

設計ミスの七件すべてが、数値を見たあと・次を走らせる前に認めて設計し直したものである。　較正を先に宣言しておくと、自分のコードのバグが「物理の破れ」に化ける前に捕まる。本章ではさらに、**厳密な対称性の検査が破綻の場所（caustic）を指す器械になった。**

79-8. 何を主張しないか ⚠️

- **「$s = 2$ を測った」とは言わない。** 測ったのは「連続が返すはずの指数を因果集合も返す」であって、q^{ab} の重み -2 を直接測ったのではない。重み -2 は連続側の計算の中に入っている。
- **目標 1.68 は格子収束していない。** $n = 300 \to 600$ で $+0.061$ 動く。1.68–1.74 の幅を持つ数として扱う。区間 $[1.16, 2.13]$ はどちらも含むので判定は変わらないが、**「一致した」と書けるのは区間の幅がこの程度だからである。**
- **r 一変数則は経験則である。** 同じ r で 9% のばらつきがあり、$A_0 = 0.013$ の曲線がわずかに上にずれる。厳密な相似則だとは言わない。**そして caustic の手前でしか成り立たない。**
- **$s_{\mathrm{eff}}(r)$ の形は説明できていない。** 等方な汚染（$s_{\mathrm{con}} = 0$）を異方な信号に足しても指数は上がらないのに、実測は上がる。絶対値の中の混ざり方が効いているとしか言えない。
- **λ_0 が普遍だとは主張しない。** 一つの lapse、一つの A_0、一つの L での値である。c_1 や A_0 への依存は測っていない。$\lambda_c = 0.138$ と $\lambda_0^{\mathrm{cont}} = 0.200$ の比 1.45 が偶然かどうかも分からない。
- **数値の一致を「同じ機構」の証明とは呼ばない。** λ_0 が 21–26% 違うことも書いた通りである。
- **連続の流れが因果集合前進の「正しい極限」だとは主張しない。** §79-4 の viscosity 解との対応は論証であって証明ではない。因果集合の前進は Bresenham 日程による層単位の離散前進である。
- **$r = 10.2$ での目標は決められないままである。** 前々節の $s = 1.62 / 2.20$ を何と比べるべきかは、まだ決まっていない。
- **緩和の残存率が a に依る**（0.755–0.963）。k に $\pm 7\%$ の系統が入りうる。測ってはいるが補正はしていない。
- **床の ρ 依存はまだ三点である。** 指数 -0.167 は三点の当てはめにすぎない。
- **量子化なし・古典・トーラス・定数の a, b。** 前章までの制限をそのまま引き継ぐ。

79-9. 次章へ

精度の勝負は ρ の壁に当たっている。床は $\rho^{-0.17}$ でしか下がらず、λ を上げる道は λ_0 で反転し、A_0 を上げる道は caustic に突き当たる。**同じ機構の別の予測を当てにいくほうが、同じ費用で得られる情報が多い。** 次章は q^{ab} の非対角成分 ―― $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + 2c\,dx\,dy$ の**傾いた光円錐**を因果集合に入れる。

第 80 章　傾いた光円錐 — 形は合い、振幅が足りない ⚠️🆕

— q^{ab} の非対角成分と、走らせる前に「決まらない」と計算すること

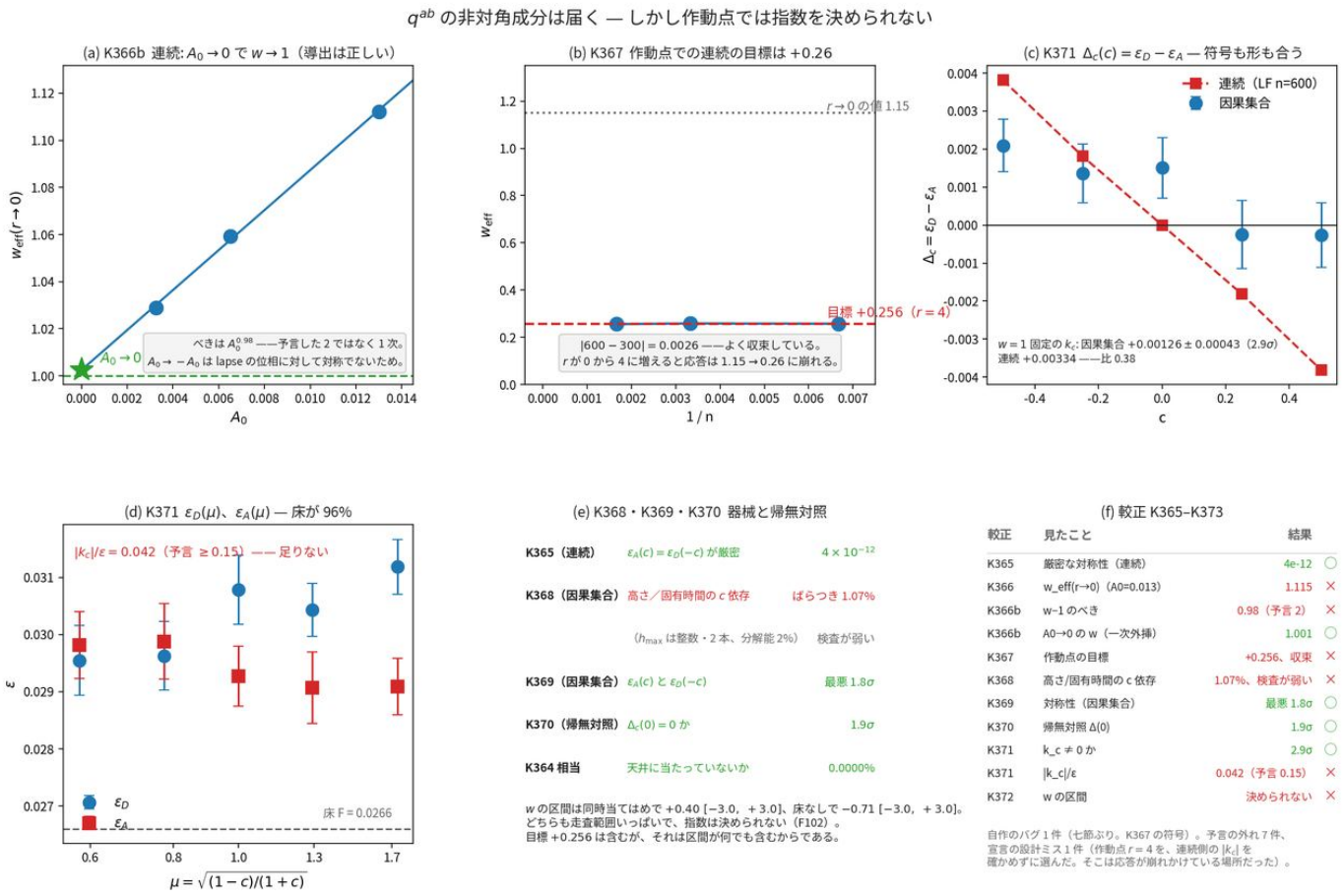


図 80-1. 第一走（K365–K373）。(a) K366b 連続で $A_0 \to 0$ とすると $w \to 1$ ——導出は正しい。べきは $A_0^{0.98}$、一次であって二次ではない。(b) K367 作動点での連続の目標 $+0.2558$。格子 $n = 150/300/600$ でよく収束している。(c) K371 $\Delta_c(c) = \varepsilon_D - \varepsilon_A$。因果集合（丸）は連続（四角）と同じ符号・同じ奇関数の形。(d) K371 $\varepsilon_D(\mu)$、$\varepsilon_A(\mu)$。床 $F = 0.0266$ が ε の 96% を占める。(e) K368・K369・K370 器械と帰無対照。(f) 較正 K365–K373。

私は第 XXII 部でここまで $q^{ab} = \mathrm{diag}(a^{-2}, b^{-2})$ の**対角成分**だけを測ってきた。精度の勝負は床の $\rho^{-0.17}$ の壁に当たっていた。**別の予測を当てにいく。** 光円錐を傾ける。

$$q_{ab} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}, \qquad \det q_{ab} = 1, \qquad q^{xy} = -c\gamma$$

$\det q = 1$ なので**体積は c に盲目**である。動くのは円錐の傾きだけである。GR は $\varepsilon \propto q^{ab} n_a n_b$ を予言する。それが不規則な因果集合に届くかを問う。

> **(i) 届いている。** 非対角の効きは第一走で 2.9σ、下見して作動点を選び直した第二走で $\mathbf{9.3\sigma}$。
> **(ii) 形は合う。** $\Delta^{\rm causet}(c) = R\,\Delta^{\rm cont}(c)$ が $\mu = 1.36$–3.96（$q^{ab} n_a n_b$ で 16 倍）を**一つの振幅で説明する。** χ^2/自由度 $= \mathbf{0.54}$。
> **(iii) 合わないのは振幅だけである。** $R = \mathbf{0.116 \pm 0.037}$。
> **(iv) 指数 w は測らなかった。** 走らせる**前**に区間の幅を計算し、$\rho \simeq 1.6 \times 10^8$ が要ると分かって **F112 を発火させ、降りた。** 代わりに測れる量に取り替えた。
> **(v) $\varepsilon \propto q^{ab} n_a n_b$ が成り立つ境界は衝撃である。** $\max |\nabla f|_q < 1$ の間だけ $|w| = 0.98$–1.06。
> **(vi) 方法が二つ加わった。** **連続側の下見** と **走らせる前の威力計算**。

80-1. 前章までの推定量は非対角に盲目である

$\xi^a = q^{ab} M_b$、$\delta f = -\xi^a \partial_a f_0$ とする。軸に沿った初期面 $f_0 = f_0(x)$ では

$$\delta f = \gamma f_0' \big[N_2 N_1' + c\, N_1 N_2' \big]$$

第二項は $\sin(2\pi x/L)\sin(2\pi y/L)$ の形をしており、y 平均が消える。しかも $x \leftrightarrow y$ 対称性から $\varepsilon_Y(c) = \varepsilon_X(c)$ が厳密に成り立つので差は恒等的に 0 になる。**初期面を斜めにしなければ、q^{xy} はどこにも現れない。**

80-2. 斜めのさざ波 — 走行 D と走行 A

走行 D（対角）：$f_0 = \tau_0 + A_0\cos(k(x+y)) \to \xi^x + \xi^y = \gamma(1-c)(M_x + M_y)$
走行 A（反対角）：$f_0 = \tau_0 + A_0\cos(k(x-y)) \to \xi^x - \xi^y = \gamma(1+c)(M_x - M_y)$

$\mu \equiv \sqrt{(1-c)/(1+c)}$ と置くと $\gamma(1\mp c) = \mu^{\pm 1}$ である。したがって

$$\varepsilon_D = F + k_c\,\mu^{\,w}, \qquad \varepsilon_A = F + k_c\,\mu^{-w}, \qquad \textbf{GR は } w = 1$$

一般化すれば $\varepsilon \propto q^{ab}n_a n_b$（$n$ はさざ波の波数ベクトル）である。軸に沿えば $q^{xx} = a^{-2}$、斜めなら $\tfrac{1}{2}(q^{xx} + 2q^{xy} + q^{yy}) = \gamma(1-c) = \mu$ ——q^{xy} **はここで初めて入る。**

45° 回転すれば q_{ab} は対角化できる。それでもこれが新しい検査である理由は二つある。lapse は回転しないので ξ^a が M_b と平行でなくなること、そしてトーラスの周期が x, y 方向に固定されていることである。**測っているのは「新しい成分」ではなく「行列として正しく効くか」である。**

80-3. 厳密な対称性 — 機械精度の器械検査 ✅✅

$y \to -y$ は走行 A を走行 D に移し、同時に $c \to -c$ にする（N_2 は cos なので不変）。したがって

$$\boxed{\varepsilon_A(c) = \varepsilon_D(-c) \textbf{ は厳密である。実装が正しければ機械精度で成り立つ。}}$$

これは本章でいちばん働いた器械検査である。連続側は第一走で相対 4×10^{-12}（**K365 合格、P204**）、第三走では $c = \pm 0.88$ まで広げても相対差 5.6×10^{-16}（**P221b 合格**）。因果集合側は第一走で最悪 1.8σ（4 点で $0.6, 0.6, 0.7, 1.8\sigma$。**K369 合格**）、第二走・第三走とも最悪 1.0σ（**K378・K386 合格**）。天井は三走とも 0.0000% である。

80-4. 第一走 — 効きは届く、指数は決まらない（K365-K373）

宣言 `K_declared_offdiag.md` を、**数値を一つも見る前に**書いた。作動点は $\rho = 1.428 \times 10^6$、$N = 35986$、$T = 12$、$A_0 = 0.018$、$\tau_0 = 0.025$、c 5 点 × 25 本である。

c	-0.50	-0.25	0	$+0.25$	$+0.50$
μ	1.732	1.291	1.000	0.775	0.577
ε_D	0.03118	0.03043	0.03078	0.02963	0.02955
ε_A	0.02909	0.02907	0.02927	0.02988	0.02981
Δ_c（因果集合）	$+0.00209$	$+0.00136$	$+0.00151$	-0.00025	-0.00027
Δ_c（連続 LF）	$+0.00382$	$+0.00181$	0	-0.00181	-0.00382

$$k_c\,(w{=}1 \text{ 固定}) = +0.00126 \pm 0.00043 \quad (\mathbf{2.9\sigma}), \qquad \frac{|k_c|}{\varepsilon} = \mathbf{0.042}$$

帰無対照　$\Delta_c(0) = +0.00151 \pm 0.00079$（$1.9\sigma$、**K370　合格、P208**）。$\Delta_c(c)$　は連続と**同じ符号・同じ奇関数の形**をしており、大きさは連続の $+0.00334$ の 0.38 倍である。

しかし $|k_c|/\varepsilon \geq 0.15$ という予言に対して実測は 0.042 ——**床が 96% を占める**（**K371 落第、P209**）。w の 95% 区間は同時当てはめで $+0.40\,[-3.0, +3.0]$、床の要らない推定量で　$-0.71\,[-3.0, +3.0]$。**どちらも走査範囲いっぱいで、指数は決められない**（**K372　落第、P210　→ F102**）。目標 $+0.2558$ を含みはするが、**区間が何でも含むので意味を持たない。**

連続側は別の話をした。A_0 を振ると $w_{\text{eff}}(r \to 0) - 1$ は $0.0289\,(A_0{=}0.00325)$、$0.0594\,(0.0065)$、$0.1122\,(0.013)$ と動き、べきは $A_0^{0.979}$ ——**一次であって二次ではない**（**K366b、P212・P213 落第**）。私は $O(|\nabla f|^2)$ だから二次だと見立てたが、$A_0 \to -A_0$ は斜めのさざ波を半波長ずらすだけで lapse の位相は動かないので、**対称性ではなく奇数次が許される**。一次で外挿すると

$$\boxed{w(A_0 \to 0) = \mathbf{1.001} \quad \textbf{—— } \varepsilon \propto q^{ab}n_a n_b \textbf{ という導出そのものは正しい。}}$$

F105 は踏まない。 外れたのは「べきが 2」という私の見立てだけである。

なぜ因果集合側の信号がこれほど弱かったか。$r = \lambda/A_0 = 4$ を選んだのは費用（$\rho = 1.43 \times 10^6$ なら 26 分）からである。**しかしそこは連続の応答自身が $w : 1.15 \to 0.26$ まで崩れている場所だった。** 崩れているところでは ε_D と ε_A の差が縮む。連続でも $|k_c|/\varepsilon = 0.239$、因果集合では床が厚いので 0.042 まで落ちる。

> **宣言の設計の誤り。作動点を選ぶとき、連続側の $|k_c|/\varepsilon$ を先に計算しなかった。**
> 連続の計算は数分で済む。**やっておけば、この作動点は選ばなかった。**

前章も同じ形のミスをしている（A_0 を上限まで上げたら連続側が caustic に入った）。二度続いた。**「作動点を決める前に連続側で下見をする」を方法として立てる。**

80-5. 方法が一つ加わった — 連続側の下見（K374）

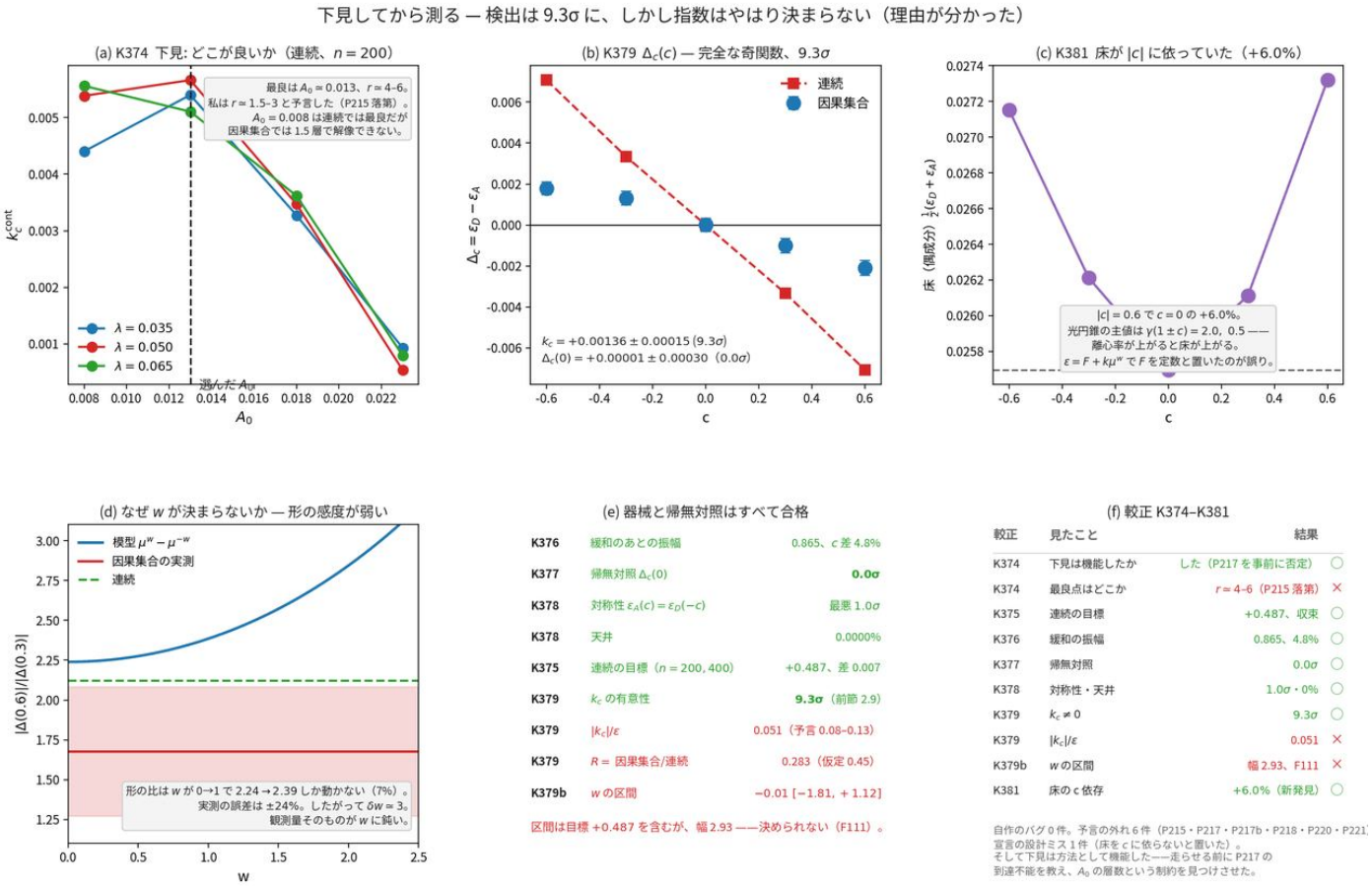


図 80-2. 第二走（K374–K381）。(a) K374 下見。連続（LF、$n = 200$）で $\lambda \times A_0$ の格子を 86 秒で走査した。(b) K379 $\Delta_c(c)$ ——完全な奇関数、9.3σ。(c) K381 床が $|c|$ に依っていた（$|c| = 0.6$ で $+6.0\%$）。(d) なぜ w が決まらないか。模型の比は $w : 0 \to 1$ で 7% しか動かず、実測の誤差は $\pm 24\%$。(e) 器械と帰無対照はすべて合格。(f) 較正 K374–K381。

viscosity 解（LF、$n = 200$）で $\lambda \times A_0$ の格子を回す。**86 秒で終わった。** 因果集合 1 本（25 秒）の 3.4 倍にすぎない。

λ	A_0	r	k_c^{cont}	$\lvert k\rvert/\varepsilon$	w_{eff}	$\max \lvert\nabla f\rvert_q$
0.035	0.008	4.4	$+0.00440$	**0.929**	$+0.997$	0.64
0.050	0.013	3.8	**$+0.00566$**	0.593	$+0.653$	2.33
0.065	0.013	5.0	$+0.00510$	0.451	$+0.492$	3.18
0.065	0.023	2.8	$+0.00080$	0.059	$+0.065$	4.36

P215 落第。 最良点は $r \simeq 4$–8 で A_0 は小さいほど良い。私は $r \simeq 1.5$–3 と予言していた。**P216 合格**（$|k^{\text{cont}}|/\varepsilon \geq 0.30$ の点は多数、最良 0.929。F106 は踏まない）。

下見は、走らせる前に三つを教えた。

1. k_c^{cont} **の最大値は** 0.0057 **しかない。** 軸に沿った場合の 0.0090 の 0.63 倍である。床 $F \simeq 0.022$ は同じなので $|k_c|/\varepsilon \simeq 0.10$ ——**予言 P217（**≥ 0.15**）は到達不能だと、因果集合を一度も走らせないうちに分かった。**
2. A_0 **は層の厚さの数倍必要だという制約を、私は式に入れ忘れていた。** 下見の最良点 $A_0 = 0.008$ は $\rho = 2 \times 10^6$ で 1.5 層しかない。
3. **区間の幅を決めるのは** $|k_c|/\varepsilon$ **ではなく** k_c/σ **である。** $\sigma \propto \varepsilon/\sqrt{n}$ なので実現数で補える。**実現を 25 → 100 本にした。**

下見の価値は「良い点を見つけること」ではない。「その問いがその設定で答えられるか」を先に教えることである。

80-6. 第二走 — 9.3σ、そして床が $|c|$ に依っていた（K375-K381）

作動点: $\rho = 2.1 \times 10^6$、$N = 41580$、$A_0 = 0.013$（2.4 層）、$\tau_0 = 0.030$、$T = 12$（$\lambda = 0.0645$、$r = 5.0$）、$c \in \{-0.6, -0.3, 0, 0.3, 0.6\}$、**各 100 本**、3.4 時間。器械はすべて合格した（K376 緩和後の振幅 0.865・c 差 4.8%、K377 帰無対照 $+0.00001 \pm 0.00030$ ——0.0σ、K378 対称性 1.0σ・天井 0.0000%、K375 連続の目標 $w_{\text{eff}} = +0.4868$）。

c	-0.6	-0.3	0	$+0.3$	$+0.6$
μ	2.000	1.363	1.000	0.734	0.500
ε_D	0.02804	0.02687	0.02570	0.02561	0.02627
ε_A	0.02626	0.02556	0.02569	0.02662	0.02837
Δ_c	$+0.00178$	$+0.00131$	$+0.00001$	-0.00101	-0.00210
$\pm$	0.00030	0.00033	0.00030	0.00035	0.00037

$$k_c\,(w{=}1\text{ 固定}) = +0.00136 \pm 0.00015 \qquad \mathbf{9.3}\sigma \qquad (\text{第一走は } 2.9\sigma)$$

K379 合格（P218b）。 ただし $|k_c|/\varepsilon = 0.051$（予言 0.08–0.13）で **P217b は落第**。理由は $R =$ 因果集合 k／連続 $k = 0.283$ が仮定の 0.45 より小さかったことである。**しかも** R **は三節で単調に下がっている:** $0.496 \to 0.376 \to 0.283$。前章で確かめた変位則（$R = 0.140 + 1.212\times$変位）はもう当たっていない。

新発見（K381）。 ε_D は μ の単調関数ではなく、$\mu \simeq 0.73$ で最小になって $\mu = 0.5$ で上がる。偶成分 $\frac{1}{2}(\varepsilon_D + \varepsilon_A)$ を取ると $0.02715,\ 0.02621,\ 0.02570,\ 0.02611,\ 0.02732$（$c = -0.6 \to +0.6$）。

床は $|c|$ **とともに上がる。** $|c| = 0.6$ **で** $+6.0\%$**。** $\varepsilon = F + k\mu^w$ **で** F **を定数と置いたのは設計ミスだった。**

当然だった。光円錐の主値は $\gamma(1 \pm c)$ で、$c = \pm 0.6$ では 2.0 と 0.5 ——**離心率が上がる**。離散化の床が円錐の形に依るのは自然である。同時当てはめがそのせいで走査の端（$w = +3$）に張り付いた。**正しくは奇関数** $\Delta_c = \varepsilon_D - \varepsilon_A$ **を使う。**c **に依る床は完全に消える。**

それでも w は決まらなかった。$\Delta_c = k_c(\mu^w - \mu^{-w})$ の 2 パラメータ当てはめは $w = -0.01\,[-1.81, +1.12]$、**幅 2.93**、$\chi^2 = 2.2/3$（**K379b 落第、P221 → F111**）。宣言はこう診断した ——独立な情報は $|\Delta(0.3)|$ と $|\Delta(0.6)|$ の 2 個だけで、w を決めるのはその比である。模型の比は $\mu_1 = 2.0$、$\mu_2 = 1.363$ で $w = 0$ が 2.239、$w = 1$ が 2.385、$w = 2$ が 2.844 ——**w が $0 \to 1$ で 7% しか動かない**。いっぽう実測の比は 1.676 ± 0.405 で誤差 $\pm 24\%$。したがって $\delta w \simeq 3$。「観測量そのものが w に鈍い。μ の範囲を広げるしかない」——そう書いた。

80-7. その診断が誤っていた — 境界は衝撃である（追補その 1、K382）

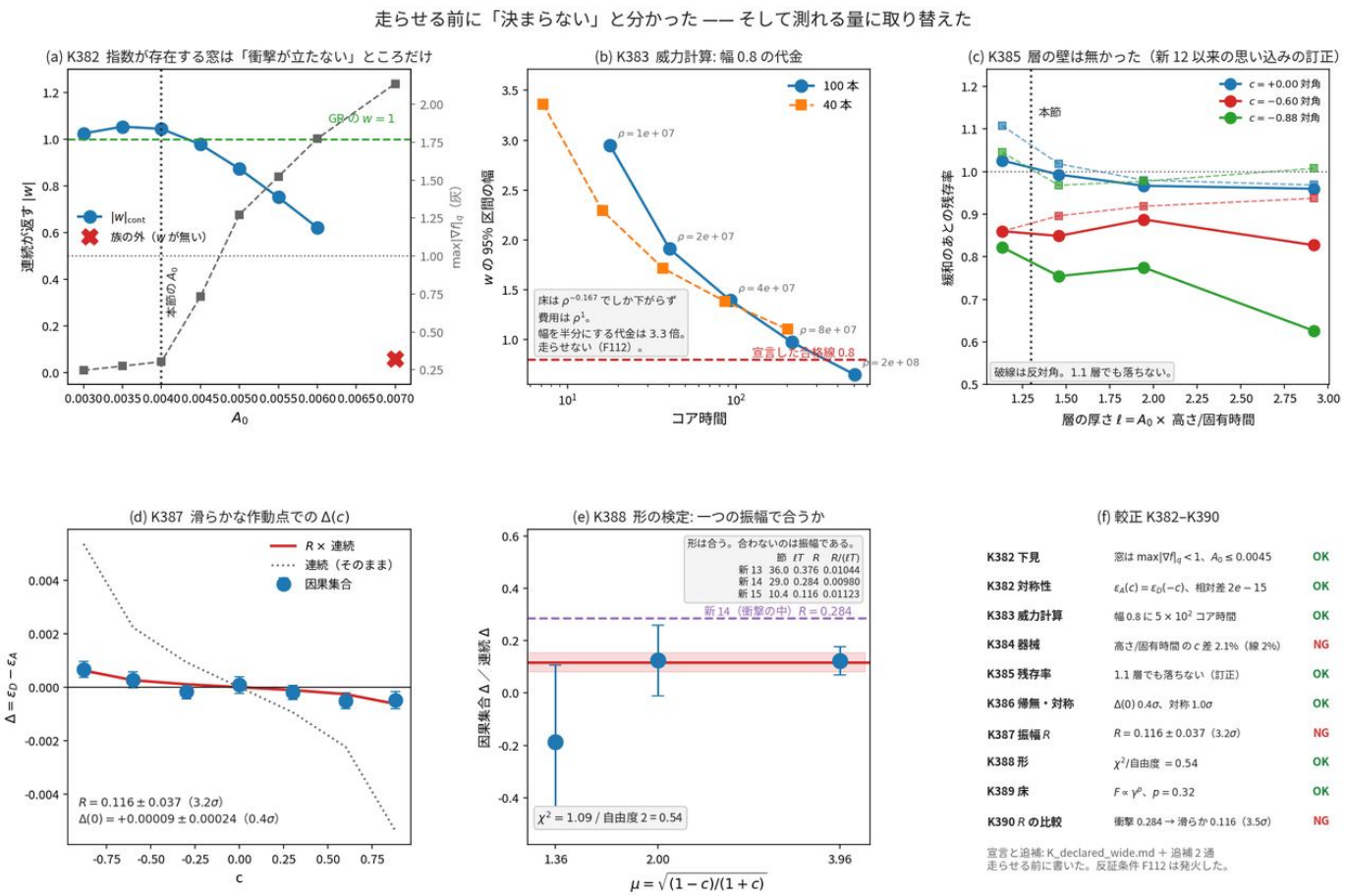


図 80-3. 第三走（K382–K392）。(a) K382 指数が存在する窓は「衝撃が立たない」ところだけ。$\max|\nabla f|_q < 1$ の間だけ連続は $|w| \simeq 1$ を返す。(b) K383 走らせる前の威力計算。幅 0.8 には 5×10^2 コア時間が要る ——走らせない（F112）。(c) K385 層の壁は無かった。残存率は 1.1 層でも落ちない。(d) K387 滑らかな作動点での $\Delta(c)$。(e) K388 形の検定 ——一つの振幅で合うか。$\chi^2/\text{自由度} = 0.54$。(f) 較正 K382–K390。

第三走の宣言 `K_declared_wide.md` は「μ を ± 0.88 まで広げる」だった。**その追補を、やはり新しい数値を一つも見ないうちに書いた。** 使ったのは第二走で**すでに記録済み**の数値だけである。そこで診断が誤っていたことが分かった。

奇関数 $\Delta(c)$ の**連続側**の比（$n = 400$、$\mu_1 = 2.0$、$\mu_2 = 1.3628$）は $0.007070/0.003333 = \mathbf{2.1212}$。ところが模型 $\Delta = k(\mu^w - \mu^{-w})$ が返せる比は $w \to 0$ で 2.2394、$w = 0.5$ で 2.2754、$w = 1$ で 2.3848、$w = 2$ で 2.8437 である。

測定値 2.1212 は $w \to 0$ の下限 2.2394 より小さい。連続側そのものが模型の族の外にあった。

w を $-\infty$ から $+\infty$ まで振っても届かない。**第二走の当てはめが走査の端に張り付いたのは、統計が足りなかったからではなく、当てはめる先が無かったからである。「幅 2.93」は誤差ではなく模型の破れを測っていた。** これは記録済みの数値から読めたことで、**第二走の時点で気づくべきだった。宣言の設計の誤り 29 件目である。** 下見を方法に加えておきながら、**下見の表の w_{eff} 列を作動点の選択に使わなかった。表は正しく、読み方が誤っていた。**

では族の外に出る境界はどこか。$\lambda = 0.020$、$c \in \{0, \pm 0.3, \pm 0.6, \pm 0.88\}$（$\mu$ は 0.253 から 3.958）、$n = 400$ で A_0 を振る。

A_0	$\lvert k\rvert/\varepsilon$	比	$\lvert w\rvert$	$\max\lvert\nabla f\rvert_q$
0.0030	0.598	2.4966	**1.026**	0.25
0.0035	0.616	2.5273	**1.055**	0.28
0.0040	0.624	2.5169	**1.045**	0.30
0.0045	0.623	2.4489	**0.979**	0.73
0.0050	0.618	2.3522	0.874	1.27
0.0055	0.613	2.2549	0.752	1.52
0.0060	0.609	2.1687	0.623	1.77
0.0070	0.594	1.9710	**族外**	2.14

$\max\lvert\nabla f\rvert_q < 1$ **（尾根が折れない）の間だけ** $\varepsilon \propto q^{ab}n_a n_b$ **（**$w=1$**）が成り立つ。**

族の内外の境目は $\max\lvert\nabla f\rvert_q \simeq 1$ にぴたりと一致する。**衝撃（尾根の折れ）が立つと応答が飽和し、どんな冪も形を説明しない。** $n = 200/400/700$ で確認済みである（$A_0 = 0.0040$ で $1.045 \to 1.045 \to 1.018$）。**第一走も第二走も衝撃の中にいた**（$\max\lvert\nabla f\rvert_q \simeq 3.2$）。**P227 は半分落第**——窓は存在するが $\lvert k\rvert/\varepsilon$ は 0.60–0.67 で、宣言した ≥ 0.80 に届かない。

80-8. 方法がもう一つ加わった — 走らせる前の威力計算（K383、F112 の発火）

宣言 §3 はこう書いていた ——**「予測した幅が 0.8 を超えたら、因果集合は走らせない。」** 入力はすべて実測である。1 本あたりの $\sigma(\varepsilon)$ は Poisson の 1.61 倍（第二走の実測）、床は $\rho^{-0.167}\lambda^{0.17}\gamma^{0.26}$、$R = 0.283$（第二走）。$A_0 = 0.0045$（線形性の上限）、$c$ 7 点で合成データを作りブートストラップを回す。

ρ	元の数／本	層 ℓ	N_{real}	w の 95% 幅	コア時間
1.0×10^{7}	130,500	1.44	100	2.95	18
2.0×10^{7}	261,000	1.84	100	1.91	40
4.0×10^{7}	522,000	2.34	100	1.40	92
8.0×10^{7}	1,044,000	2.99	100	0.98	214
1.6×10^{8}	2,088,000	3.81	100	**0.65**	**504**

P222 落第。F112 が発火した。宣言どおり、因果集合の w 測定は走らせなかった。 理由の構造は単純で、これ自体が結果である。

$$\sigma(\Delta) \propto \sqrt{\varepsilon/\text{added}} \propto \sqrt{\rho^{-0.167}/\rho} = \rho^{-0.584}, \qquad \text{費用} \propto \rho$$

幅を半分にする代金は $2^{1/0.584} = 3.3$ **倍。床が** $\rho^{-0.167}$ **でしか下がらないことの帰結である。**

80-9. 器械較正 — 層の壁は無かった（K384-K385）

$\rho = 1.0\times10^{7}$、$N = 130{,}500$、$\tau_{\text{link}} = 0.00726$、$R_{\text{cut}} = 4\tau$。

K384 落第（僅差）。 高さ／固有時間は 324.1（$c=0$）、324.1（-0.6）、331.0（-0.88）——ばらつき 2.13%、合格線 2%。リンク／元は 31.1–31.2 で c に依らない。$\lvert c\rvert$ **の偶関数なので奇成分 Δ からは落ちる。そのまま記録する。**

K385 は予想外の合格だった。 緩和のあとの残存率（対角／反対角）：

ℓ（層）	$c=0$	$c=-0.6$	$c=-0.88$
1.13	1.03 / 1.11	0.86 / 0.86	0.82 / 1.05
1.46	0.99 / 1.02	0.85 / 0.90	0.76 / 0.97
1.94	0.97 / 0.98	0.89 / 0.92	0.78 / 0.98
2.92	0.96 / 0.97	0.83 / 0.94	0.63 / 1.01

残存率は層の厚さにほとんど依らない。「A_0 は層の数倍必要」は誤りだった。

前章以来この思い込みが作動点を縛っていた。**検証せずに制約として使い続けた。宣言の設計の誤り 30 件目である。** 落ちるのは薄さではなく μ の大きい側の対角さざ波（$c=-0.88$ で 0.63–0.82）で、これは**急な尾根が緩和で潰れる**という、連続側にもある効果である。

80-10. 観測量を取り替えた — 形は合う、振幅が足りない（K386–K390）

w は諦める。追補その 2 を**因果集合を走らせる前に**書き、代わりに素性の良い量を宣言した。連続側は作動点で $|w|=0.929$、$\max|\nabla f|_q=0.94$ ——**GR の $\varepsilon\propto q^{ab}n_an_b$ が成り立つ滑らかな場所**である。そこで問うのは

$$\Delta^{\text{causet}}(c)=R\,\Delta^{\text{cont}}(c),\qquad R=\frac{\sum_c \Delta^{\text{causet}}\Delta^{\text{cont}}/\sigma^2}{\sum_c(\Delta^{\text{cont}})^2/\sigma^2}$$

作動点: $\rho=1.0\times10^7$、$N=130{,}500$、$T_{\text{ext}}=0.145$、$\tau_0=0.030$、$A_0=0.0040$（**1.30 層**）、$T=8$（$\lambda=0.02468$）、緩和 16、c 7 点、**各 40 本**、4.0 時間。連続の目標は同じ λ・同じ緩和で $n=800$ まで格子収束させた。**K386 合格**（帰無対照 $\Delta(0)=+0.000088\pm0.000245$、$0.4\sigma$）。

c	μ	ε_D	ε_A	Δ	連続の Δ
-0.88	3.958	0.017730 ± 0.000197	0.017065 ± 0.000213	$+0.000664\pm0.000290$	$+0.005353$
-0.60	2.000	0.014140 ± 0.000221	0.013862 ± 0.000206	$+0.000278\pm0.000302$	$+0.002229$
-0.30	1.363	0.012730 ± 0.000191	0.012904 ± 0.000197	-0.000174 ± 0.000274	$+0.000934$
0	1.000	0.012469 ± 0.000218	0.012382 ± 0.000219	$+0.000088\pm0.000309$	0

$$R=\mathbf{0.1165\pm0.0367}\quad(3.2\sigma)\qquad\text{——P230 落第（予言 }0.45\pm0.10\text{）}$$

K388　合格。これが本章の一番良い結果である。 $|c|$ ごとの比は 0.1241 ± 0.0541（$\mu=3.958$）、0.1246 ± 0.1354（2.000）、-0.1861 ± 0.2935（1.363）。

$$\chi^2=1.09\ /\ \text{自由度 }2=\mathbf{0.54}$$

μ が 1.36 から 3.96 まで（$q^{ab}n_an_b$ で 16 倍）、一つの振幅で形が説明できる。合わないのは振幅だけである。

K389 合格。 床は $|c|$ とともに上がる: $+2.4\%$（$|c|=0.3$）、$+10.3\%$（0.6）、$+27.4\%$（0.88）。$F\propto\gamma^p$ で $p=\mathbf{0.319}$（予言 0.26 ± 0.15）。第二走の 2 点からの外挿が $\gamma=2.105$ まで持った。

K390 落第 → F120。 第二走は $\rho=2.1\times10^6$、$\max|\nabla f|_q\simeq3.2$（衝撃の中）で $R=0.2845\pm0.0303$。第三走は $\rho=1.0\times10^7$、0.94（滑らか）で $R=0.1165\pm0.0367$。差は -0.168 ± 0.048（$-\mathbf{3.5}\sigma$）。**ρ を 4.8 倍にし、衝撃から出たのに R は下がった。私の読み（衝撃の深さが R を下げている）は誤りである。**

80-11. R の履歴に見える規則 💭（仮説であって主張ではない）

事後の診断である。宣言に無い。**K391**: 連続側の残存率を同じ緩和で測ると $c=-0.88$ の対角で 0.940、因果集合は 0.776——比 0.826。この比で直しても $R=0.139\pm0.044$、χ^2/自由度 $=0.57$。**振幅の欠損の 2 割ほどしか説明しない。**

K392: $\ell=A_0\times$（高さ／固有時間）、T をマイクロステップ数として

走	ℓ	T	ℓT	R	$R/(\ell T)$
第一走	3.00	12	36.0	0.376	0.01044
第二走	2.42	12	29.0	0.284	0.00980
第三走	1.30	8	10.4	0.116	0.01123

R が 3.2 倍動くあいだ、$R/(\ell T)$ は **13.6% 以内**に収まっている。$\ell T = A_0 \lambda / \tau_{\mathrm{link}}^2$ ——**さざ波の深さと流れの長さを、どちらもリンク時間で測った積**である。

仮説（主張ではない）：$R \simeq 0.0105\,\ell T$。　$R \to 1$ には $\ell T \simeq 95$ が要る。

3 点であり、二つの尺度を掛けただけの当てはめである。**次章でこれを予言として宣言し、ℓ と T を独立に振って落とす。**

80-12. 較正の表 — K365-K392

	内容	結果	判定
K365	厳密な対称性（連続）	4×10^{-12}	✅ P204
K366／K366b	$w_{\text{eff}}(r \to 0)$ ／ ずれのべき ／ $A_0 \to 0$ の w	1.115 ／ 0.98 ／ **1.001**	❌ P205・P212・P213 ／ ✅
K367	作動点の目標	$+0.2558$、収束	❌ P214（**符号バグ**）
K368	高さ／固有時間の c 依存	1.07%、検査が弱い	❌ P207
K369／K370	対称性（因果集合）／帰無対照	1.8σ ／ 1.9σ	✅ ／ ✅ P208
K371	$k_c \neq 0$ か ／ $\lvert k_c \rvert/\varepsilon$	2.9σ ／ 0.042	✅ ／ ❌ P209
K372	w の区間	決められない	❌ P210 → **F102**
K374	下見は機能したか ／ 最良点 ／ $\lvert k \rvert/\varepsilon$	事前に　P217　を否定 ／　$r \simeq 4$–6　／ 0.929	✅ ／ ❌ P215 ／ ✅ P216
K375／K376	連続の目標 ／ 緩和のあとの振幅	$+0.4868$ ／ 0.865	✅ ／ ✅
K377／K378	帰無対照 ／ 対称性・天井	0.0σ ／ 1.0σ・0%	✅ ／ ✅
K379	$k_c \neq 0$ ／ $\lvert k_c \rvert/\varepsilon$	9.3σ ／ 0.051	✅ P218b ／ ❌ P217b
K379b	w の区間	幅 2.93	❌　P218・P220・P221　→ **F111**
K381	床の c 依存	$+6.0\%$	✅（新発見）
K382	下見（線形応答の窓）	$\max \lvert \nabla f \rvert_q < 1$、$\lvert k \rvert/\varepsilon \leq 0.67$	✅ ／ 半分 ❌ P227
K383	走らせる前の威力計算	幅 0.8 に 5×10^2 コア時間	✅ → ❌ P222、**F112 発火**
K384／K385	高さ／固有時間 ／ 残存率 vs 層	2.13%（線 2%） ／落ちない	❌ ／ ✅（訂正）
K386	帰無対照・対称性・天井	0.4σ／1.0σ／0	✅ P229
K387／K388	振幅 R ／ 形の χ^2	0.1165 ± 0.0367 ／ **0.54**	❌ P230 ／ ✅ P231
K389／K390	床の γ^p ／ R の作動点依存	$p = 0.319$ ／ -3.5σ	✅ P232 ／ ❌ P233 → **F120**
K391／K392	残存率での補正 ／ $R \propto \ell T$（事後）	2 割 ／ 13.6% 以内	— ／ 仮説

累計 K198–K392: 較正 210 件、失敗 109 件（誤った予言 71 ／ 宣言の設計の誤り 30 ／ 自分で入れた不具合 8）。

80-13. 落第した 24 件❌（誤った予言 18 ／ 宣言の設計の誤り 4 ／ 自分で入れた不具合 2）

種別	件	何が起きたか	原因
誤った予言	P205・P212・P213	w_{eff} のずれのべきを 2 と予言。実測 0.98	$A_0 \to -A_0$ が lapse の位相を動かさないので**奇数次が許される**。軸に沿った場合と違う
誤った予言	P207	高さ／固有時間の c 依存 1.07%（線 1%）	$h_{\max}$ が整数で 2 本しかなく**検査の分解能が 2%**。合格条件が検査自身より厳しかった
誤った予言	P209・P217・P217b	$\lvert k_c\rvert/\varepsilon$ が予言の 1/3	R（因果集合／連続）の仮定 0.45 が高すぎた。実測は $0.496 \to 0.376 \to 0.283 \to 0.116$ と下がり続けた
誤った予言	P210・P218・P220・P221	w の区間が決まらない	第一走は床が 96%。第二走は**模型の族の外**（下記）
誤った予言	P214	連続の目標が 1.15–1.60 の外（$+0.256$）	$r = 4$ では連続の応答自身が崩れている。予言が作動点を見ていなかった
誤った予言	P215	最良点を $r \simeq 1.5$–3 と予言、実測 4–8	下見をせずに見立てを書いた。**下見が即座に否定した**
誤った予言	P222	予測した区間幅が 0.8 を超えた	床が $\rho^{-0.167}$ でしか下がらない。**F112 が発火し、走らせなかった**
誤った予言	P224・P230・P233	$R = 0.45 \pm 0.10$ と予言、実測 0.116（-3.5σ）	「R の低下は衝撃の深さのせい」という私の読みが誤り。ρ を 4.8 倍にし衝撃から出ても下がった。**原因は未解明**
誤った予言	P227	$\lvert k\rvert/\varepsilon \geq 0.80$ の窓、実測 0.60–0.67	窓は存在したが応答の上限が予想より低かった
設計の誤り (27)	第一走	作動点 $r = 4$ を、連続側の $\lvert k_c\rvert/\varepsilon$ を確かめずに選んだ	費用だけで選んだ。そこは応答が $w : 1.15 \to 0.26$ に崩れている場所だった
設計の誤り (28)	第二走	$\varepsilon = F + k\mu^{w}$ で床 F を c に依らないと置いた	光円錐の離心率が上がれば床も上がる。**奇関数 Δ_c を使えば消えるので測定は救えた**
設計の誤り (29)	第二走 → 追補 1	「幅 2.93」を統計誤差と読み、**模型の族の破れ**だと気づかなかった	下見の表は正しかった。w_{eff} 列を作動点の選択に使わなかった。読み方の誤り
設計の誤り (30)	前章以来	「A_0 は層の数倍必要」を検証せずに制約として使い続けた	K385 で残存率は 1.1 層でも落ちなかった。**思い込みが作動点を縛っていた**
自分で入れた不具合 (7)	K367	w を `-polyfit(log μ, log ε_D)` と書いた。$\varepsilon_D \propto \mu^{+w}$ なので符号は正	前章までの $\varepsilon_X \propto a^{-s}$ に引きずられた。誤 -0.256 → 正 $+0.2558$
自分で入れた不具合 (8)	K382	比 $\Delta(\mu_1)/\Delta(\mu_2)$ は w について**偶関数**なのに符号付きで解いた	下見表に意味のない $\pm$ が並んだ。$\lvert w\rvert$ で解き直し、符号は k の符号で決めた

> K367 の符号バグが見つかったのは、連続の $\Delta_c(c)$ が因果集合と**同じ符号**だったのに w が負と出て矛盾したからである。**符号の整合を独立に確かめたことが検出につながった。**

較正を先に宣言しておくと、自分のコードのバグが「物理の破れ」に化ける前に捕まる。 本章はそれを二度やった。

80-14. 何を主張しないか ⚠️

- **「q^{ab} の非対角成分を測った」とは言わない。** 45° 回転で対角化できる。測ったのは「q^{ab} を行列として使ったときに正しく効くか」である。
- **「w を測った」とは言わない。** 測れないことを**走らせる前に計算して降りた**。連続側が $w=1$ を返すことは確かめたが、それは GR の再確認であって因果集合の話ではない。
- **「非対角成分が届いていない」とも言わない。** 形は $\chi^2/\text{自由度} = 0.54$ で合っている。**足りないのは振幅だけである。**
- **R は物理量ではない。** 推定量と作動点に依る比である。同じ作動点どうしでしか比べていない。
- **$R \simeq 0.0105\,\ell T$ は 3 点の当てはめ**であり、仮説である。R が三走で下がり続けた理由は**未解明**である（F120）。残存率では 2 割しか説明できない。
- **床の $\gamma^{0.319}$ は形の当てはめ。** 離心率のどの関数かは主張しない。
- **衝撃の境界 $\max|\nabla f|_q < 1$ は連続側で測ったものである。** 因果集合側で独立に確かめてはいない。
- **量子化なし・古典・トーラス・定数の q_{ab}・$2+1$ 次元。**

80-15. 第 XXII 部の到達点

第 XXII 部は、ADM の超曲面変形代数を Poisson sprinkling の下方集合前進で表現できるかを問うところから始まった。到達点はこう書ける。

> **不規則な因果集合には変形代数がある。括弧は閉じ、閉じ方は q^{ab} に依る。**
> 異方性は符号も形も一致した。$2{+}1$ 次元でも指数は連続の目標を含んだ。
> 光円錐を傾けると $\varepsilon \propto q^{ab}n_a n_b$ が μ **で 16 倍の範囲を一つの振幅で説明する。**
> **返ってくる振幅だけが足りない。** $R = 0.116 \pm 0.037$。

第 71 章で示したのは、規則的な CA の下方集合前進作用素が**厳密に可換**であること ——生成子が無いこと ——だった。本部が示したのはその裏返しである。**規則性を捨てて不規則な因果集合にすると、代数は戻ってくる。犯人はここでも離散性ではなく規則性だった。** 第 73 章に書いた総括が、変形代数についても成り立つ。

そして本部で方法が二つ増えた。**連続側の下見**と、**走らせる前の威力計算**である。どちらも「良い作動点を見つける道具」ではない。**「その問いが、その設定で、その費用で答えられるか」を走らせる前に判定する道具**である。本部ではそれが三度働いた ——P217 の到達不能を事前に教え、A_0 の層数という入れ忘れていた制約を見つけさせ、そして F112 を発火させて w の測定そのものを取り下げさせた。

> **走らせないという結論も、宣言に照らして出せば結果である。本部でいちばん高くついた計算は、走らせなかった計算である。**

残った問いは一つに絞れる。**R を決めているのは何か。** ℓ と T を独立に振って $R \simeq 0.0105\,\ell T$ を落とす。落ちれば R の起源は別にある。当たれば、**因果集合が連続の変形代数をどれだけの割合で返すかを、初めて予言できる形**になり、$R \to 1$ に必要な計算量が式で書ける。

次の部では話を変える。第 70 章で平坦な回転曲線が $m = 1/2$ を一意に要求し、それが非解析であることを見た。二分法（状態を増やすか、規則を非解析にするか）はそのまま残っている。**変形代数がここまで戻ってきた以上、回転曲線の側でも同じ問いを立て直せる。** そこへ渡す。

第 XXIII 部　銀河の回転曲線 ふたたび

この部で明らかにしたいこと。 第 70 章は平坦な回転曲線を出せる局所規則を分類して二分法に到達したが、本文にこう書いて逃げ道を残していた —「**非線形かつ高階の規則は、私の議論の射程外である。** そこに逃げ道があるかどうかは調べていない」。第 4 期はそこから始める。閉じるか、開くか。**逃げ道の存在自体が発見になる形にしてから走らせる。**

第 81 章　逃げ道を閉じる — 平坦を止めているのはパリティである ✅🆕

— 非線形かつ高階の局所則でも、平坦な回転曲線は出ない

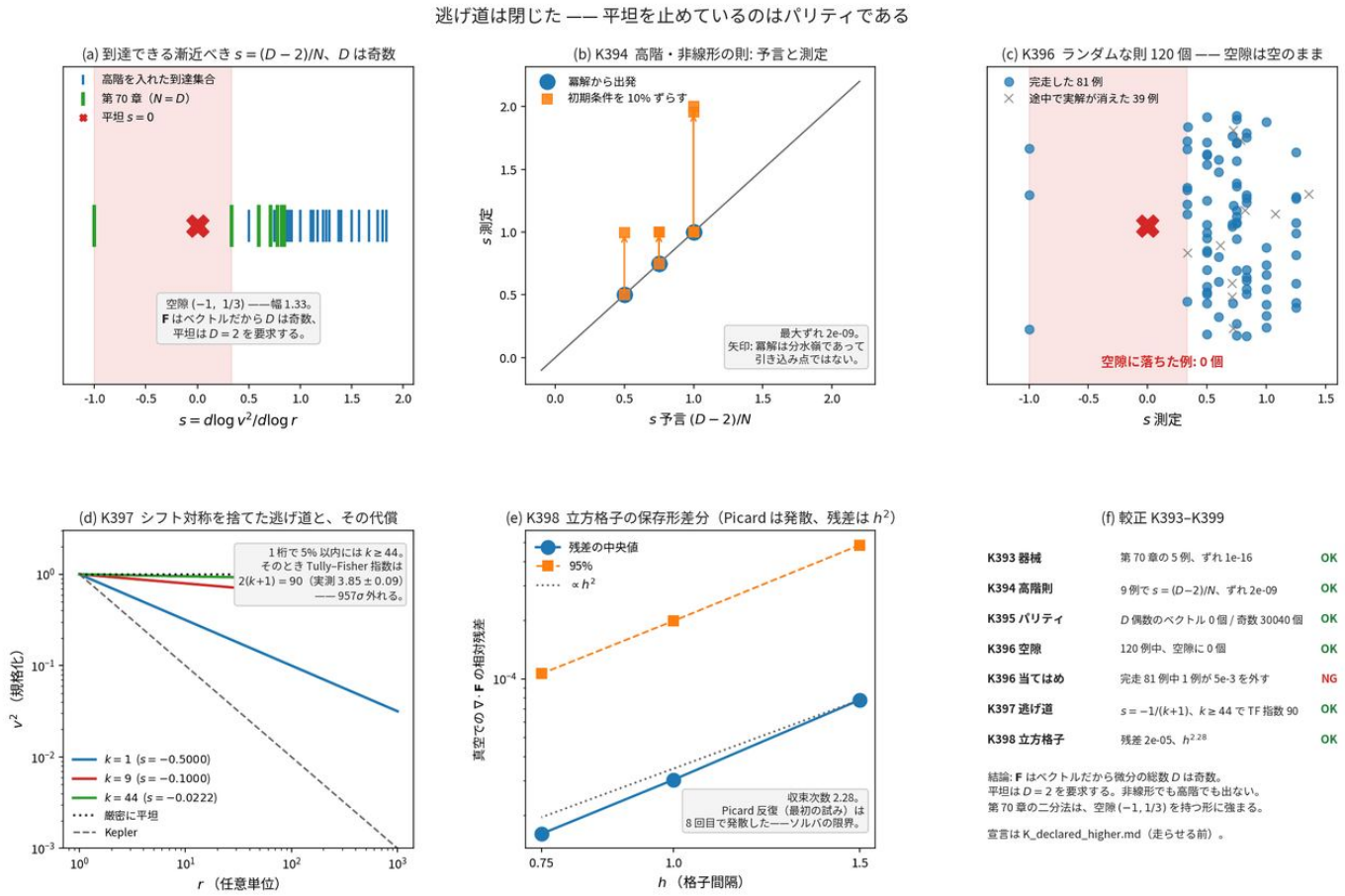


図 81-1. (a) 単項式の (N, D) 平面と直線 $s=(D-2)/N$。第 70 章の $f=y^m$ は対角線 $N=D$ にしか乗らない。(b) $D \leq 9$ でのベクトル単項式の数え上げ。偶数の D の柱がすべて 0 である。(c) 高階・非線形 9 例の対数勾配。予言と測定のずれは 1.5×10^{-9} 以下。(d) ランダム係数 120 例の漸近べきのヒストグラム。空隙 $(-1, 1/3)$ に一本も柱が立たない。(e) シフト対称を捨てた $(\Phi/\Phi_0)^k \nabla\Phi$ の $s=-1/(k+1)$ と、そこから出るバリオン Tully–Fisher 指数 $2(k+1)$。実測 3.85 ± 0.09 の帯は遥か下にある。(f) 較正 K393–K399。

第 70 章は逃げ道を一つ開けたまま終わっていた。本章はそれを閉じる。

(i) 非線形かつ高階へ広げても、解析的な局所則から平坦な回転曲線は出ない。
(ii) 理由は一行で書ける。 $\mathbf{F}$ はベクトルだから自由添字は 1 個、
残り $D-1$ 個が対で潰れる。ゆえに**微分の総数 D は奇数**である。
(iii) 漸近べきは一本の式で決まる。 $s=\dfrac{D-2}{N}$ $(N=\Phi$ の因子数$)$
平坦 $s=0$ は $D=2$ を要求する。偶数だから出ない。
(iv) 第 70 章の二分法は強まる。シフト対称なら到達集合は $\{-1\} \cup [1/3, \infty)$
で、**空隙** $(-1,\ 1/3)$ **が空**。平坦はその真ん中にある。
(v) 逃げ道は一つだけ在った（シフト対称を捨てる）。 Tully–Fisher が 957σ で塞ぐ。

81-1. 問い — 第 70 章が残した一行

第 70 章は、平坦な回転曲線を出せる局所規則を分類して **二分法**に到達した。状態を増やすか、規則を非解析にするか。どちらも捨てがたい代償を伴う。だが同じ章の本文には、次の一行が残っていた。

> 私が示したのは**フラックスが一階微分だけの関数**である場合であり、線形なら高階でも $\ln r$ は出ない。**非線形かつ高階の規則は、私の議論の射程外である。** そこに逃げ道があるかどうかは調べていない。

射程外と書いたものは、いつか測らなければならない。第 4 期の再検討（`Phase4_Plan_ja.md` §3）で、私はこの課題を 4-1 として**第 4 期の先頭に置いた**。理由は表にそのまま書いてある——道具は既存（動径 ODE ＋ 立方格子）、費用は軽、リスクは低。**一番安くて一番はっきり決まるものを先に置く。** 続く 4-2（E(iii)′）、4-3（F(i)）、4-4（F(ii)）はどれも中以上の費用とリスクを負う。

非線形かつ高階の局所則に、解析性を保ったまま平坦を出す道はあるか。

例によって、**走らせる前に宣言を書いた**（`K_declared_higher.md`、日付 2026-08-24）。枠組み・次数勘定・パリティ定理・空隙の予想・逃げ道の見積もりは、**数値を一つも見ないうちに紙の上で固定してある**。本章の数値は、その宣言に対する答え合わせである。

81-2. 枠組み — 四つの対称性と二つの整数

重力を**局所保存則**として書く。

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 4\pi G\rho, \qquad \mathbf{F} = （\Phi \text{ の導関数の多項式}）$$

多項式であることが「原点で解析的」の中身である。課したのは四つ。

1. **並進不変** — $\mathbf{F}$ に r や $\mathbf{x}$ が陽に入らない。
2. **回転不変** — $\mathbf{F}$ はベクトルとして変換する。
3. **パリティ不変** — $\mathbf{F}$ は擬ベクトルでない。
4. **シフト対称** $\Phi \to \Phi + \text{const}$ — 第 70 章が暗黙に使っていた条件。**これが本章の主役になる。**

各単項式に二つの整数を割り当てる。

$$N = \Phi \text{ の因子の数}, \qquad D = \text{微分の総数}$$

$\partial_i\Phi$ は $(N, D) = (1, 1)$。$y\,\partial_i\Phi = \partial_i\Phi\,\partial_j\Phi\,\partial_j\Phi$ は $(3, 3)$。$(\nabla^2\Phi)\partial_i\Phi$ と $\partial_i\partial_j\Phi\,\partial_j\Phi$ はどちらも $(2, 3)$。$\partial_i\nabla^2\Phi$ は $(1, 3)$。この二つの整数だけで、以下がすべて決まる。

81-3. 次数勘定 — 対角線から平面へ

球対称・真空では、$\mathbf{F}$ が何階の微分を含んでいても、**発散形でありさえすれば** Gauss の法則から厳密に

$$r^2 F_r = GM$$

が成り立つ。ここが本章の梃子である。冪解 $\Phi' \propto r^{-p}$ を入れると単項式 (N, D) は $F_r \propto r^{N(1-p)-D}$ だから、$N(1-p) - D + 2 = 0$。すなわち

$$\boxed{s \equiv \frac{d\log v^2}{d\log r} = 1 - p = \frac{D-2}{N}}$$

平坦な回転曲線とは $s = 0$ のことである。

第 70 章の $f = y^m$ は $(N, D) = (2m+1, 2m+1)$ で $s = (2m-1)/(2m+1)$。**元の式は、この一般式の対角線 $N = D$ にすぎなかった。** 高階に行くとは、対角線を離れて (N, D) 平面全体を使うということである。

K393 合格。 器械の較正として、第 70 章の 5 例（$m = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$）を新しい動径 ODE ソルバで再現した。予言 P234 は $-1, -1/3, 0, +1/5, +1/3$ を 10^{-4} 以内。**最大ずれ** 1.1×10^{-16}——機械精度である。

K394 合格（P235）。 高階・非線形の 9 例。$r = 10^3$–10^6 を積分し、外側 30% で対数勾配を測った。

規則	N	D	s 予言	s 測定	初期条件を 10% ずらすと
$(\nabla^2\Phi)\nabla\Phi$	2	3	$+1/2$	$+0.500000000$	$+0.500000$
$(\nabla^2\Phi)^2\nabla\Phi$	3	5	$+1$	$+1.000000000$	$+1.000000$
$y(\nabla^2\Phi)\nabla\Phi$	4	5	$+3/4$	$+0.750000000$	$+0.750000$
$(\partial\partial\Phi{:}\partial\partial\Phi)\nabla\Phi$	3	5	$+1$	$+1.000000000$	$+1.000000$
$(\partial\Phi{\cdot}\partial\partial\Phi{\cdot}\partial\Phi)\nabla\Phi$	4	5	$+3/4$	$+0.749999998$	$+0.998328$
$\partial_i\partial_j\Phi\,\partial_j\Phi$	2	3	$+1/2$	$+0.499999999$	$+0.992680$
$y\,\partial_i\partial_j\Phi\,\partial_j\Phi$	4	5	$+3/4$	$+0.749999998$	$+0.998328$
$\partial_i(\nabla^2\Phi)$	1	3	$+1$	$+1.000000000$	$+1.955561$
$y\,\partial_i(\nabla^2\Phi)$	3	5	$+1$	$+1.000000000$	$+1.999990$

最大ずれ 1.5×10^{-9}。式は (N,D) 平面の上で働いている。

式が使えない場合が一つある。 $(\nabla^2\Phi)\,\partial_i\partial_j\Phi\,\partial_j\Phi$（$N=3$、$D=5$、予言 $+1$）は $p=0$ で、そのとき $\partial_i\partial_j\Phi\,\partial_j\Phi\propto u'u$ が**冪解の上で恒等的に消える。** 単項式が冪の仮定の上で縮退すると $s=(D-2)/N$ は使えず、対数補正が要る。**例外として記録する。**

そして予期しなかったことが分かった。　表の右端の列である。いくつかの則では、**冪解は分水嶺であって引き込み点ではない。**初期条件を 10% ずらすと $s\to1$ や $s\to2$ へ走る。$\partial_i\nabla^2\Phi$ という 4 階の線形演算子なら、$\Phi\propto r^2$ という**増大する斉次解**が生き残るからである。

> **高階にすると、汎用の解はむしろ平坦から遠ざかる。増大する斉次解が支配する。**

81-4. パリティ定理 — 逃げ道が閉じる理由（K395）

ここが本章の芯である。証明は一行で書ける。

$\mathbf{F}$ はベクトルだから、単項式には**自由添字が 1 個**ある。単項式に現れる添字は全部で D 個。残りの $D-1$ 個は対で潰れる（δ_{ij} で縮約される）以外にない。ゆえに $D-1$ は偶数、すなわち

> **$\mathbf{F}$ の各単項式で、微分の総数 D は奇数である。**

平坦 $s=0$ は $D=2$ を要求する。**偶数だから、出ない。**

P236 合格。 一行の証明を信用せず、$D\le9$・各因子が微分を 1 個以上持つ単項式を機械的に数え上げた。

D	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ベクトルの作り方	1	**0**	9	**0**	105	**0**	1575	**0**	28350

> $D\le9$ で、D が偶数のベクトル単項式は **0** 個（奇数側は 30040 個）。F122 は踏まない。

Levi-Civita を使えば D は偶数にできる。 $\varepsilon_{ijk}\partial_j\Phi\,\partial_k\nabla^2\Phi$ は $D=4$ である。だがこれは**擬ベクトル**であり、$\nabla\cdot\mathbf{F}$ が擬スカラーになるのでパリティ不変性で落ちる。さらに球対称では $\nabla\Phi\parallel\nabla(\nabla^2\Phi)\parallel\hat r$ だから恒等的にゼロである。

数値でも確かめた。球対称な Φ での二つのベクトルのなす角の sin は、$h=0.125$ で 7.6×10^{-3}、$h=0.0625$ で 1.9×10^{-3}。**収束次数 2.00**——離散化の誤差そのものであって、有限の角ではない。非球対称な Φ では 0.22 のまま動かず、比は 119 倍、h を半分にするたびに 2 倍に開く。**ゼロが本物であることを、ゼロでない場合と並べて確かめた。**

81-5. 空隙 — 到達集合の穴（K396）

シフト対称なら各因子が微分を 1 個以上持つから $D\ge N$。D は奇数、$1\le N\le D$。到達する $s=(D-2)/N$ を並べる。

D	到達する s
1	-1
3	$1,\ 1/2,\ \mathbf{1/3}$
5	$3,\ 3/2,\ 1,\ 3/4,\ 3/5$
7	$5,\ 5/2,\ 5/3,\ 5/4,\ 1,\ 5/6,\ 5/7$

$D=2j+1$ の最小値は $(2j-1)/(2j+1)$ で、$j=1$ の $1/3$ が全体の最小の正値である。

到達集合 $\subset\{-1\}\cup[1/3,\infty)$。空隙 $(-1,\,1/3)$ が空である（幅 1.33）。平坦 0 はその真ん中。

第 70 章の集合 $\{-1, 1/3, 3/5, 5/7, \dots\}$ は対角線の分。**高階は新しい値（$1/2,\ 3/4,\ 5/6, \dots$ と ≥ 1）を足すが、空隙には一つも入らない。**

走査した。$f(y,z)=\sum_{a,b} c_{ab} y^a z^b$（$a+b\leq 3$、$c_{ab}$ は $[0.3,3]$ の一様乱数）をランダムに 120 個作り、$r=10^3$–10^8 で積分して最後の 1 桁で勾配を測った。

- **空隙 $(-1,1/3)$ に落ちた例は 0 個。** 実測値の集合は $-1.0000,\ +0.3333,\ +0.5000,\ +0.6000,\ +0.7143,\ +0.7500,\ +0.8333,\ +1.0000,\ +1.2500$——**すべて到達集合の値**である（残りは収束途中の値で、いずれも $1/3$ 以上）。
- **120 例のうち 39 例は完走しなかった。** z についての多項式の実根が有限の r で消える。**その規則の場の方程式は、ある半径から先で実解を持たない。** これも「平坦にならない」理由の一つとして数えてよい。
- **完走した 81 例のうち 1 例だけ**、予言 $+0.7143$ に対し測定 $+0.7211$（差 6.8×10^{-3}）で、宣言した 5×10^{-3} を外した。

P237 は空隙の条項が合格、当てはめの条項が落第。**F123 は踏んでいない** (空隙は空のまま)

81-6. 逃げ道 — 在った。そして Tully–Fisher が塞ぐ（K397）

シフト対称を捨てるとどうなるか。CA のセルは状態そのものを読むのだから、これは許される。Φ を直接読めば N は D を超えられる。$\mathbf{F}=(\Phi/\Phi_0)^k\nabla\Phi$ は $(N,D)=(k+1,1)$ で $s=-1/(k+1)$。

k	0	1	2	3	5	9	19	44
s 予言	-1	$-1/2$	$-1/3$	$-1/4$	$-1/6$	$-1/10$	$-1/20$	$-1/45$
s 測定	-1.0000000	-0.5000000	-0.3333333	-0.2500000	-0.1666667	-0.1000000	-0.0499996	-0.0222208

空隙は埋まる。しかし $s=0$ にはならない。 そして代償が三つある。

1. **$\Phi\to0$ at infinity という境界条件が厳密に要る。** 初期条件を 10% ずらすと、どの k でも $s\to-1.00$（Kepler）に戻る。**逃げ道は測度ゼロの分水嶺である。**
2. **平坦さに要る k が大きい。** 1 桁の r で v^2 の変化を 5% 以内にするには $1/(k+1)\leq0.0223$、すなわち $k\geq\mathbf{44}$。
3. **バリオン Tully–Fisher が壊れる。** $v^2\propto M^{1/(k+1)}$ だから指数は $d\log M/d\log v=2(k+1)$。$k=9$ で 20、$k=44$ で **90**。

実測 3.85 ± 0.09（Lelli ら 2019）から **957σ。F124 は踏まない。二分法は生き延びる。**

P238 合格。 宣言に書いた $k\geq44$・指数 ≥90 が、そのまま出た。第 70 章と同じ数（実測 3.85 ± 0.09）が、二度目も番人を務めたことになる。

> ⚠️ **限定（第 13 版）。** 957σ は実測の統計誤差だけで割った形式的な値である。第 70・81 章の結論は、単一スカラー、発散形、解析性、回転・並進・パリティなどの仮定の内側の次数勘定で、その外（非局所、複数場、時間依存など）は閉じていない。§87-9。

81-7. 立方格子 — 定式化そのものの検定（K398b）

以上はすべて球対称の動径 ODE である。定式化（発散形の Gauss 則）が三次元の格子でも成り立つかを別に見る必要がある。F125 に書いたとおり、合わなければ疑うのは物理ではなく私の定式化である。

動径 ODE の解 $\Phi(r)$ を格子に載せ、保存形差分で $\nabla\cdot[(\nabla^2\Phi/z_0)\nabla\Phi]$ を計算し、真空で 0 になるかを見る。

h	**1.50**	**1.00**	**0.75**
残差の中央値	7.8×10^{-5}	3.0×10^{-5}	$\mathbf{1.6\times10^{-5}}$
95 パーセンタイル	4.8×10^{-4}	2.0×10^{-4}	1.1×10^{-4}

収束次数 2.28。P239 合格。 立方格子の保存形差分は、高階則の球対称 Gauss 則を h^2 で再現する。ここでも**離散性は障害にならなかった**——障害は、この章の最初から最後まで、規則の側の対称性である。

81-8. 較正の記録

	内容	判定
K393	器械（第 70 章の 5 例）	合格（ずれ 1.1×10^{-16}）
K394	高階・非線形 9 例で $s=(D-2)/N$	合格（ずれ 1.5×10^{-9}）
K395	パリティ定理の網羅列挙	合格（D 偶数のベクトル 0 個）
K396	空隙の走査（120 例）	**空隙は合格、当てはめは落第**
K397	逃げ道（シフト対称を捨てる）	合格（957σ で塞がる）
K398	立方格子	**Picard は発散**、残差検定は合格
K399	総合	合格

累計 K198–K399: 較正 217 件、失敗 113 件（誤った予言 72 ／宣言の設計の誤り 32 ／自分で入れた不具合 9）。

81-9. 落第した 4 件 ❌

#	何が落ちたか	原因
1	**宣言した器械が動かなかった（K398、宣言の設計の誤り　32　件目）。** $\mathbf{F}=(\nabla^2\Phi/z_0)\nabla\Phi$ を 81^3 の格子で Picard 反復（z をリンク上で凍結 → 可変係数 Poisson を CG で解く、減衰 0.5）にかけたところ、**8 回目で相対変化が 4.4×10^2 に発散した。**	4 階の問題に対して「z を凍結する」反復は縮小写像ではない。第 70 章 K165b（$m\ge0.75$ で Picard が収束しなかった）と**同じ型の失敗を、私は繰り返した。** 宣言の段階で、器械が動くかどうかを別に確かめていなかった。
2	**合格条件の切り方を誤った（K396、宣言の設計の誤り　31　件目）。** 「全例で 5×10^{-3} 以内」と書いた。	**有限の r 範囲での収束の遅さを勘定に入れていなかった。** 正しくは「r の範囲と収束の判定を先に決める」べきだった。
3	**P237 の当てはめの条項が外れた（誤った予言）。** 完走 81 例のうち 1 例、予言 $+0.7143$ に対し測定 $+0.7211$（差 6.8×10^{-3}）。	r　の範囲が有限で、劣勢な項がまだ効いている。物理の破れではなく、条件 2 の帰結である。
4	**自分で入れた不具合（9 件目）。** K396 の最初の実装で、多項式の実根が取れなかったときに**前段の値で黙って代用**していた。そのせいで「空隙に落ちた例」が 3 件出て、$s\simeq2,\ 17,\ 32,\ 41$ という**到達集合に無い値**が多数並んだ。	例外を握り潰して継続する分岐を書いた私の過ちである。**気づけたのは、到達集合を先に紙の上で決めてあったからである。** 到達集合に無い値が並ぶ——それだけが手がかりだった。根が取れなければ積分を止めるように直したところ、空隙の例は 0 件になった。

4 番目は本書の方法そのものである。宣言が無ければ、$s\simeq17$ は「空隙が埋まった、F123 を踏んだ、二分法は改訂だ」という**発見に化けていた。**

較正を先に宣言しておくと、自分のコードのバグが「物理の破れ」に化ける前に捕まる。

81-10. 何を主張しないか ⚠️

- **発散形（局所保存則）と多項式（原点で解析的）を仮定している。** $\nabla\cdot\mathbf{F}=4\pi G\rho$ と書けない規則、$\sqrt{y}$ のような非解析項は最初から除いてある。**それが二分法のもう一方の枝である。** 本章は枝を切ったのではなく、片方の枝に穴が無いことを示しただけである。
- **場は一つのスカラー Φ だけ。** 場を増やす道（＝状態を増やす）は二分法の第一の枝であって、本章の対象ではない。
- **パリティ定理は $D\le 9$ で数え上げた。** 一般の D については「自由添字 1 個＋残りが対」という組合せ論であり、証明は一行だが、**測ったのは $D\le 9$ である。**
- **回転曲線しか見ていない。** 銀河団・弾丸銀河団・CMB・構造形成は第 70 章と同じく外にある。
- **a_0 は出していない。** 4-4 の課題である。
- **縮退する単項式には式が使えない。** $(\nabla^2\Phi)\partial_i\partial_j\Phi\,\partial_j\Phi$ のように冪解の上で恒等的に消える場合、$s=(D-2)/N$ は対数補正なしには使えない。この例外の一般論は書いていない。
- **「ダークマターが不要」とは言わない。** 言えたのは**選択肢の数**だけである。

81-11. 次に立つ問い

第 4 期はまだ三つ残っている。**4-2（E(iii)′）** は第 71 章の予想——「拘束代数の不在と modular Hamiltonian の非局所性は同じ欠落の二つの顔」——を裁く。新 1–15（K245–K392）で不規則な因果集合には変形代数があり GR と同じ形で閉じることが分かった以上、予想の前件は壊れている。代数が戻った側で modular が局所に近づいたかを、規則格子 0.331 と因果集合 0.406（第 58・59 章）を**同じ作動点で並べ直して**決める。既存の数値は逆を示している。**4-3（F(i)）** は everpresent Λ の芯にある「4 体積の揺らぎは Poisson だから $\sqrt{V}$」を、まず揺らぎそのものの実測から始める（K383 の過分散 $\sigma_{\text{実測}}/\sigma_{\text{Poisson}}=1.61$ が、無検査で使えないことを示した）。**4-4（F(ii)）** は $a_0\simeq cH_0/2\pi$ ——膨張格子の上で本章の結論を走らせる、第 4 期でただ一つリスク「高」の節である。本章の梃子だった $r^2F_r=GM$ は、膨張する背景の上では成り立たない。そこで何が残るかは、まだ分からない。

第 XXIV 部　9 版以降に何が変わったか

この部で明らかにしたいこと。 第 73 章は第 9 版までの到達点を総括した。この部はその続きである。2026-08-21 の検証計画は本書に**三つの欠落**を名指しした — 生成子の不在、載せたままの測度、そして「規則性が全部の犯人」という未検証の一般化である。K198 から K399 までの延べ 217 件の較正のあとで、その三つはどうなったか。**埋まったもの、形が変わったもの、そして新しく開いた穴を、同じ厳しさで数える。**

第 82 章　三つの欠落は埋まったか ⚠️🆕

— 9 版以降、延べ 217 件の較正が返したもの

2026-08-21 の検証計画（`Research_Plan_Open_Problems_ja.md`）は、第 9 版の本書に**三つの欠落**を名指しした。第 73 章の総括はそこで止まっている。この章はその続きである。

82-1. 名指しされた三つの欠落

	欠落	当時の言い方
1	**生成子の不在**	CA には再葉層化の**不変性**はあるが、それを**生成する代数**が見当たらない（第 71 章）。第 68 章が段 (2) で止まった場所と同じ壁だろう、という予想だけを記して止まっていた
2	**測度は載せたもの**	公理は量子測度を一つに絞らなかった（第 XIII 部）。$\lvert\cdot\rvert^2$ がなぜ $\lvert\cdot\rvert^2$ なのかは、まだ問いの形にすらなっていない
3	**規則性が全部の犯人**	Lorentz の障害も、K_4 異方性も、「今」が傾かないことも、離散性ではなく規則性のせいだった。**ならば規則性を捨てた離散世界で何が回復し、何が失われるかを、まだ正面から測っていない**

以下、順に判定する。

82-2. 欠落 1 — 「不在」ではなく「不足」だった ⚠️

> 規則的な CA では、変形代数は**厳密に可換**である（第 74 章）。生成子は無い。
> 不規則な因果集合では、**ある**。閉じ方も q^{ab} に依る（第 77–80 章）。
> 足りないのは**振幅だけ**である。

これが 9 版以降で最も大きな変化である。**欠落の性質が変わった。**

	第 9 版まで	第 10 版
生成子	見当たらない	**ある**（不規則な離散性の上で）
閉じ方の q^{ab} 依存	未測定	対角も非対角も測った。**形は** $\chi^2/\text{自由度} = 0.54$ **で合う**
対称性 $\varepsilon_A(c) = \varepsilon_D(-c)$	—	機械精度（5.6×10^{-16}）
定量的な一致	—	$R = 0.116 \pm 0.037$。**連続の** 12% **しか返らない**

「不在」は「不足」になった。そして不足の大きさには規則が見えている — $R \simeq 0.0105\,\ell T$（ℓ はさざ波の深さ、T は流れの長さ、どちらもリンク時間で測る）。三点の当てはめであり、**仮説であって主張ではない。** 第 4 期以降の最初の課題である。

そして「不在」が消えたことで、第 71 章の予想が宙に浮いた。 予想は「拘束代数の不在と modular Hamiltonian の非局所性は同じ欠落の二つの顔」だった。ところが代数が戻った側（不規則な因果集合）で modular はむしろ**遠くまで届く**（規則格子 0.331 に対し因果集合 0.406、第 58・59 章）。**前件が壊れた予想は、検定ではなく作動点を揃えた裁定を要する。** 第 4 期 4-2 に回した。

82-3. 欠落 2 — 半分だけ埋まった ⚠️

第 75 章は測度の階層を測り、level 2 が孤立していることを数値で示した。そして時間の矢について、Loschmidt 反転が厳密に効くことを確かめた。

だが「なぜ $|\cdot|^2$ か」には答えていない。 答えたのは「$|\cdot|^2$ の周りに何があるか」である。とくに**「なぜ複素数か」には触れてもいない**（第 75 章の「主張しないこと」に明記した）。

> 欠落 2 は、**問いの形になった**。埋まってはいない。

82-4. 欠落 3 — 埋まった。そして代価が測れた ✅

第 76 章の三択がこれである。

> 離散・厳密局所・Lorentz 不変 —— **三つ同時には成り立たない。**

規則性を捨てると Lorentz は戻る。代わりに**局所性が対数的に壊れる**。これは本書で最も強い形の言明の一つであり、**反例一つで死ぬ形**をしている。それが健全である。

そして第 81 章が、同じ「規則性ではなく形の問題」を回転曲線の側でもう一段締めた。平坦な回転曲線を止めているのは離散性でも規則性でもなく、**パリティ**だった — $\mathbf{F}$ はベクトルだから微分の総数 D は奇数、平坦は $D = 2$ を要求する。第 70 章の二分法は、空隙 $(-1, 1/3)$ を持つ形に強まった。

82-5. 数え上げ

	件数
較正（K198–K399、延べ）	**217**
失敗	**113**
— 誤った予言	72
— 宣言・設計の誤り	32
— 自分で入れた不具合	9

> **失敗率 52%。** 二回に一回は外している。

この数字を隠さないことが本書の方法である。そして内訳を見ると、**誤った予言（72 件）より宣言・設計の誤り（32 件）の方が痛い**。前者は世界について間違えただけだが、後者は**測れない実験を設計してしまった**ということである。

第 9 版まで（K1–K197）の失敗はもっと少なかった。理由は簡単で、**当時は測りやすいものを測っていた**からである。9 版以降は、目標値の分からない量、σ の見積もりが要る量、作動点の選択そのものが結論を左右する量へ入っていった。

82-6. 方法に加わった三つ 🆕

失敗の内訳が変わったので、方法も変えた。**第 4 期以降の標準手順とする。**

	手順	どの失敗から生えたか
1	**下見** — 連続側（あるいは厳密解）で作動点を先に走査してから、因果集合を走らせる	第 80 章。作動点を下見せずに選んで $\lvert k_c\rvert/\varepsilon = 0.042$ しか出なかった
2	**走らせる前の威力計算** — 実測の σ から結論の区間幅を予測し、**決まらないなら走らせない**	第 80 章 F112。w を幅 0.8 で決めるには 5×10^{2} コア時間が要ると**走らせる前に**計算して降りた
3	**模型の族が有効な範囲を先に確かめる**	第 80 章。連続側そのものが $\varepsilon = F + k\mu^{w}$ の族の外にあり、「幅 2.93」は誤差ではなく**模型の破れ**だった

「走らせてから決まらないと分かる」より、「走らせる前に決まらないと分かる」方がよい。

82-7. 新しい通奏低音 💭

第 9 版までの通奏低音（付録 D）に、9 版以降で三つ加わった。

(D-5) 衝撃が立つと、冪という概念そのものが消える。 第 80 章で、$\varepsilon \propto q^{ab}n_a n_b$（GR の予言、$w=1$）が成り立つのは $\max\lvert\nabla f\rvert_q < 1$ の間だけだと分かった。尾根が折れると応答が飽和し、**どんな冪も形を説明しない**。第 79 章の caustic も、第 81 章の「実解が有限半径で消える」も同じ形をしている。**線形応答の窓の外では、指数を測ろうとすること自体が誤りである。**

(D-6) 自分の思い込みが作動点を縛る。 第 79 章以来「A_0 は層の厚さの数倍必要」と信じて作動点を縛ってきたが、第 80 章で測ったら **1.1 層でも残存率は落ちなかった**。三節ぶん、必要のない制約の中で設計していたことになる。**検証していない制約を制約として使わない。**

(D-7) 到達できる値が飛び飛びで、欲しい値が隙間にある。 第 33 章の $I \geq 2$、第 70 章の $s \in \{-1, 1/3, 3/5, \dots\}$、そして第 81 章の $s = (D-2)/N$ — 三度目である。**連続に見える自由度が実は離散で、欲しい値がその隙間に落ちている。** 本書で最も繰り返し現れた構造であり、そのたびに「では何を捨てるか」という二分法が生えてきた。

82-8. 残っている穴 ⚠️

正直に並べる。

1. **R の起源。** $R \simeq 0.0105\,\ell T$ は三点の当てはめである。ℓ と T を独立に振って落とす。
2. **第 71 章の予想の裁定。** 作動点を揃えた比較がまだない。
3. **everpresent Λ。** 芯にある「4 体積の揺らぎは Poisson」は**無検査で使えない**（第 80 章の K383 で、推定量の分散が Poisson の 1.61 倍という過分散を実測した）。揺らぎそのものの測定から始める。
4. $a_0 \simeq cH_0/2\pi$。第 81 章の梃子だった $r^2F_r = GM$ は膨張背景では成り立たない。何が残るか分からない。
5. **測度の一意性。** 「なぜ複素数か」。
6. **量子化。** 第 XXII 部は最初から最後まで**古典**である。トーラス、定数の q_{ab}、$2+1$ 次元。

9 版以降で本書が得たのは**生成子の在り処**である。
得ていないのは**その大きさ**であり、そして**量子化**には一歩も踏み込んでいない。

82-9. 何を主張しないか ⚠️

- **「変形代数を因果集合の上で構成した」とは言わない。** 測ったのは**推定量の振る舞い**であって、Poisson 括弧そのものではない。位相空間も、拘束も、正準構造も置いていない。
- **「R が 1 に近づく」とは言わない。** 近づく道筋の**計算量**を書いただけである。
- **「三択」は反例一つで死ぬ。** それが健全である。
- **回転曲線について、どちらが正しいかは決めていない。** 決められない。第 70 章の限定はそのまま生きている。
- **失敗率 52% は誇りでも恥でもない。** 測りにくいものを測ろうとした結果であり、**測りやすいものだけを測れば下がる**数字である。

第 XXV 部　差分と絶対値 — カシミール、Jacobson、流体力学極限

第 83 章　差分は普遍、絶対値は非普遍 💭📚

— 真空エネルギーから時空の法則が「自動的に」出るとは、どういう意味か

第 5-1 節で本書は、CA が宇宙定数問題を**回避しない**ことを認めた。格子は発散を止めるが、大きさを小さくはしない。第 IX 部と第 XIII 部は、それでも Einstein 方程式の必要条件が境界のエンタングルメントで成り立つこと（第 36 章。第 13 版で限定。§87-2）、しかし鎖の一環が規則性で切れること（第 58-3 節）、不規則な因果集合では面積則の**スケーリング**は出るが**係数**は出ないこと（第 60 章）を測った。

本章はこれらを一つの言い方にまとめる。**真空エネルギーの差分は普遍的で、絶対値は非普遍的である。** そしてこの言い方が、CA の流体力学極限で「方程式の形は保存則と対称性で決まるが、輸送係数は衝突規則で決まる」という既知の構造と**形式的に同型**であることを示す。同型が破れる場所から、第 4 期で測るべき量を四つ取り出す。

出発点は、本書がまだ扱っていなかった一つの現象 — カシミール効果 — である。

83-1. カシミール効果が教える二つのこと 📚

平行導体板の間の真空エネルギーは、発散する零点和どうしの差として

$$E_{\mathrm{Cas}}(d) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720}\frac{A}{d^3}$$

となり、**カットオフに依存しない**。実際の物質では Lifshitz 理論が誘電関数 $\varepsilon(\omega)$ を通じてカットオフを与え（プラズマ周波数より上で物質は透明になる）、その依存性は有限導電率の補正として現れるが、主要項は変わらない。

ここから二つのことが読める。

第一。 カシミール力は零点エネルギーの**絶対値**を一切参照しない。Jaffe（2005）が示したように、カシミール力は荷電物質間の光子交換（遅延 van der Waals 相互作用）の総和として計算でき、結合定数 $\alpha \to 0$ で消える。つまりカシミール効果は「真空エネルギーが実在し重力源になる」ことの証拠ではない。第 5-1 節の宇宙定数問題は、カシミール効果を持ち出しても軽くならない。

第二。 物質の微細構造をどこまで掘っても、標準模型の弱い相互作用の補正は入らない。W/Z の到達距離 $1/M_W \approx 2\times10^{-18}$ m はカシミール実験の典型距離（10 nm〜1 μm）より 10 桁以上短く、質量 m の場の寄与は e^{-2md} で消える。物質の $\varepsilon(\omega)$ への間接的な補正も、原子のパリティ非保存効果と同程度（相対 10^{-11}）で、$\varepsilon(\omega)$ のモデル化誤差（10^{-2}）に埋もれる。逆に、精密カシミール測定は μm 以下の未知の Yukawa 型短距離力を**制約する**道具になっている。

本章で使うのは第一の点である。**差分は普遍、絶対値は非普遍。** これを、重力の三つの導出と、CA の流体力学極限の両方に当てる。

83-2. 三つの導出を並べる 📚

重力の「自動的な発生」を主張する導出には、本書がすでに使ったものと、まだ使っていないものがある。

(A) Jacobson の熱力学的導出（1995）。 任意の点の局所 Rindler 地平面に対し、Unruh 温度 $T = \hbar a/2\pi c$ で Clausius 関係 $\delta Q = T\,dS$ を要請し、$S = \eta A$ を要請する。Raychaudhuri 方程式で面積変化を曲率に結ぶと、すべての局所地平面でこれが成り立つ必要十分条件が

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{\hbar\eta} T_{\mu\nu}, \qquad \eta = \frac{1}{4G\hbar}$$

である。入力は Clausius・面積則・因果構造の三つ。η は入力であり、Λ は積分定数である。Jacobson（1994）は η を地平面をまたぐ絡み合いエントロピー $S \simeq c_d A/\varepsilon^{d-2}$ と同定して $G \sim \varepsilon^2$（Sakharov の誘導重力）を得た。**これはバルクの導出であり、境界理論を要求しない。**

(B) 境界の第一法則からの導出（Faulkner-Van Raamsdonk ほか、2014）。 境界 CFT の球領域について $\delta S_A = \delta\langle K_A\rangle$ をすべての領域・向きに課すと、RT 辞書のもとで線形化 Einstein 方程式が出る。本書が第 36・58・60 章で「Jacobson–Van Raamsdonk 型」と呼び、三段（面積則 → modular の局所性 → 第一法則）に分けて測ったのはこちらである。**これは境界の導出であり、ホログラフィック辞書を要求する。**

(C) CA の流体力学極限（Chapman–Enskog）。 六角格子の格子ガス（FHP）で、局所衝突規則・保存量（質量・運動量）・格子対称性群の三つから

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla\cdot\big(g(\rho)\,\rho\,\mathbf{u}\mathbf{u}\big) = -\nabla p + \nu\nabla^2(\rho\mathbf{u})$$

が出る。形は保存則と対称性で決まる。粘性 ν は衝突規則から計算される非普遍量、$g(\rho)$ は格子によるガリレイ不変性の破れで連続体にはない因子、正方格子（HPP）では 4 階テンソルの等方性が保証されず粘性応力が異方的になる。

(A) と (B) は違う導出である。本書はこれまで (B) だけを測ってきた。(A) は境界理論を要らないぶん CA に近く、しかし Unruh 温度という「加速度に比例する温度」の格子対応物を要る。§83-4 でそこに戻る。

83-3. 同型性 ― 形は自動、係数は非普遍 💭

要素	(A) Jacobson	(B) 境界第一法則（第 36・58・60 章）	(C) 流体力学極限
基本自由度	Planck スケールの場のモード	境界 CA（自由フェルミオン鎖）	セル（アルファベット k）
局所規則	局所地平面の Clausius 関係	領域ごとの第一法則	遷移規則
保存量	$T_{\mu\nu}$	境界 T_{ab}	質量・運動量
因果構造	局所光円錐	境界の光円錐	依存円錐（第 3 章）
カットオフ ε	絡み合いの短距離カットオフ	格子間隔	格子間隔
自動的に決まるもの	Einstein 方程式の形	線形 Einstein の形（第 36 章は必要条件のみ ⚠️ §87-2）	連続体方程式の形
決まらないもの	$G \sim \varepsilon^2$、Λ	$G = 3/(2c)$ は RT で**定義**した（第 35 章）；係数（第 60 章）	ν、平衡圧力
対称性の破れ	Lorentz（基質依存）	規則格子の Lorentz（第 24 章）	$g(\rho)$、格子異方性
差分の普遍性	カシミールエネルギー	—	臨界カシミール振幅
絶対値の非普遍性	$\rho_{\text{vac}} \sim \varepsilon^{-4}$（第 5-1 節）	同左	バルク圧力　$O(1)$（格子単位）

三列に共通するのは、繰り込み群の構造である。**勾配展開の各次数で、対称性が許す項の形は決まり、係数は微視的規則で決まる。**　(A) で Einstein 方程式が出るのは、曲率の一次で局所性と一般共変性が許す項が $G_{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu}$ しかないから（Lovelock、第 58-3 節）。(C) で Navier–Stokes が出るのは、勾配の二次で回転対称性と保存則が許す項が圧力勾配と粘性項しかないからである。

> 「法則が自動的に発生する」とは、正確には「対称性と保存則が許す最低次の項の**形**が自動的に発生する」である。

この読み替えのもとで三列は同じ主張をしており、第 60 章の「スケーリングとしての面積則は出るが、係数は出ない」は、(C) で「Navier–Stokes は出るが ν は出ない」と同じ文である。

83-3-1. 臨界カシミール効果 ― 宇宙定数問題の格子版 📚

カシミール効果の格子対応物は Fisher–de Gennes（1978）の臨界カシミール効果である。厚さ L の格子系の自由エネルギーは単位面積あたり

$$f(L) = f_{\text{bulk}}\, L + 2 f_{\text{surf}} + \frac{\Delta}{L^{d-1}} + \cdots$$

と展開され、系が**臨界点にあるとき**（相関長が発散、すなわち創発する場が質量ゼロのとき）振幅 Δ は格子の詳細に依らない普遍量になる。2 次元では Δ は中心電荷で決まり、周期境界の帯で $-\pi c/6$ である。一方 f_{bulk} と f_{surf} は格子単位で $O(1)$ の非普遍量である。

これが §83-1 の第一の点の格子版である。真空エネルギー密度 $\sim \varepsilon^{-4}$ が宇宙定数問題を生む構造は、格子ガスのバルク圧力が格子単位で $O(1)$ になる構造と同じで、どちらも**創発した連続体理論が微視的規則の非普遍的な定数項を引き継ぐ**ことの帰結である。CA 側でこれを消す手段は、規則に対称性を課すか（粒子・空孔対称性でバルク圧力の一部を相殺する）、微調整するかしかない。重力側で Λ を小さくする既知の選択肢が超対称性・微調整・人間原理であることと、対応は一対一である。

第 5-1 節の宇宙定数問題は、CA の側では「バルク圧力は格子単位で $O(1)$」という文で言い直せる。

ここから一つの帰結が出る。**CA 基質からカシミール型の普遍的な差分が出るのは、基質が臨界点にあるときに限る。** 光子と重力子が質量ゼロであることは、CA 描像では基質が臨界点に置かれている（あるいは自己組織化している）ことを要求する。本書の自由フェルミオン鎖は半充填で臨界（$c = 1/2$、第 35 章）なので、この条件を満たしている。§83-6 (a) で直接測れる。

83-3-2. G の格子表現 💭

(A) の面積則の係数を CA で読むと、境界を 1 ステップに横切りうる情報量の上限は境界セル数 $\times \ln k$ である。これを $1/4G$ に同定すると格子単位で

$$\frac{1}{4G} = \frac{\ln k}{\varepsilon^{d-2}}$$

$d = 4$ で $G \propto \varepsilon^2 / \ln k$、Sakharov と整合する。Life なら $\ln 2$。これは G を予言してはいない。ε と k という二つの微視的パラメータに押し付けただけである。ただし押し付け先が明示的である点で、連続体の誘導重力より一段具体的であり、第 35 章の $G = 3/(2c)$（RT による定義）とは**別の経路**で G に到達している。二つが同じ模型で一致するかは §83-6 (b) の検定になる。

83-4. 同型が破れる四つの場所 💭

83-4-1. エントロピーは状態数か、流束か

(A) は $S \propto A$ を前提する。一般の CA ではブロックエントロピーは体積に比例する ― 't Hooft がホログラフィー原理の議論で指摘した Bekenstein 限界の破れであり、本書では第 35 章のバルク CA（Bekenstein 束の 10^{60} 倍）がそれである。第 60 章の因果集合では $S \propto N^{0.719}$ と、面積則でも体積則でもない中間のべきだった。

しかし (A) の dS は地平面の状態数ではなく**地平面を横切る流束**である。CA には依存円錐が厳密にあるので、領域の外部が内部について 1 ステップに得られる情報は境界セル数 $\times \ln k$ で上から抑えられ、この「流束のエントロピー」は面積則に従う。**第 72-3 節が測った「相関の増加率は境界で決まる」は、まさにこの量である。** つまり本書はすでに、状態数ではなく流束で読めば面積則が回復することを、Clifford CA で確かめている。

残るのは $T\,dS$ の T ― 加速度に比例する Unruh 温度の格子対応物である。第 69 章の音響地平線は $T = \kappa/2\pi$ を返したが、あれは流れを手で入れた位置依存規則であって、任意の点の局所 Rindler 地平面ではない。§83-6 (d) で正面から測る。

83-4-2. Lorentz ― $g(\rho)$ は次元 4、異方性は次元 6

第 24 章は Lorentz の破れを二種類に分けた。次元 6（分散関係の異方性、$(ka)^2/36$ で抑制、無害）と次元 4（粒子種ごとの極限速度、粗視化で流れない、本当の問題）。

流体力学極限 (C) には、この二種類が**正確に対応する形で**現れる。

第 24 章	(C) 格子ガス	抑制	対処
次元 4：極限速度の不一致	$g(\rho) \neq 1$（対流項のガリレイ破れ）	されない	密度を特定値に調整（＝手で合わせる）
次元 6：分散の異方性	HPP の粘性応力の異方性（4 階テンソル）	勾配二次なので相対的に抑制	六角格子（対称性群を大きくする）

$g(\rho)$ は対流項、すなわち最低次に乗る $O(1)$ の因子で、粗視化しても消えない。格子ガスの側でこれを 1 にする方法は、密度を特定の値に調整するか、多速度模型に拡張するかであり、第 24-2 節の「粒子種ごとに手で合わせるしかない」と同じ処方である。一方 HPP の異方性は粘性項、すなわち勾配二次の項に乗るので、六角格子で 4 階テンソルを等方化すれば消えるし、そもそも長波長では相対的に抑制される。これは第 24-1 節が「無害」と判定したものと同じ階層にある。

格子ガス 40 年の経験は、第 24 章の二分法をそのまま再現している。深刻なのは次元 4 だけである。

なお本書の Dirac ウォーク自身にも、**規則が自動的に生む**種依存の極限速度がある。$\cos\omega = \cos k \cos\theta$ から群速度の上限は厳密に $\cos\theta$ で（$k = \pi/2$ で到達）、質量角 θ の種ごとに極限速度が $1 - \theta^2/2$ だけ違う。これは形の上では次元 4 の破れだが、係数が $(a/\lambda_{\mathrm{C}})^2$ で抑制されるので、Planck 格子の電子で 10^{-45} と無害である。第 24-2 節の「本当の問題」は、この自動的な差ではなく、**手で与えた結合の差**が流れないことである（§6-7 追補案を参照）。

第 24-3 節と第 76 章の「ランダムネスが Lorentz を買う」にも対応物がある 📚。格子から離れて粒子を連続座標で動かす直接シミュレーション Monte Carlo（DSMC）は、ガリレイ不変性を回復する。代価は厳密な局所性（衝突相手を確率的に選ぶ）であり、第 76 章の三択「離散・厳密局所・Lorentz は同時に成り立たない」の流体版である。

83-4-3. 可逆性 — Clausius の等号は二階形式でしか成り立たない

(A) は熱力学的導出であり、微視的に可逆な力学の粗視化として熱力学が成り立つことを前提する。第 15 章は Life の像の大きさの損失が 1 セル・1 ステップあたり 0.0955 ビット（一様入力の損失は 0.2615。§87-4）であること、別の可逆力学である二階形式では厳密に 0 になることを数えた。非可逆な規則では境界を横切る情報流に Landauer 型の散逸が付随し、$\delta Q = T\,dS$ の等号は $\delta Q \le T\,dS$ になる。Jacobson 自身が後に議論したように、不等号のもとで出るのは Einstein 方程式ではなく非平衡の修正項を含む式である。

したがって (A) を CA 上で等号で再現する試みは、**二階形式の Life、Q2R、Critters** のような可逆規則で行う。素の Life での再現は「散逸を含む修正 Einstein 方程式」の模型としてだけ意味を持つ。これは第 15 章の結論（「消去は規則ではなく状態の定義から生じる」）の重力側での帰結である。

83-4-4. 量子性 — 面積則だけでは絡み合いにならない

最後に、(A)(B) の面積則は量子的な絡み合いエントロピーであり、(C) のブロックエントロピーは古典的な相関エントロピーである。両者とも面積則を与えうるが、後者に Bell 型の相関はない（第 20 章、第 49 章）。第 37 章と `Holographic_Gravity_From_Constraints_ja.md`（2026-09-13）が指摘したとおり、自由フェルミオンを増やすだけでは疎性も大 C_T の因子化も出ない。**面積則が出たことは、絡み合いを再現したことにならない。** これは四つの破れのうち唯一、規則の選択や読み替えで埋まらないものである。

83-5. 何を主張しないか ⚠️

- 本章は Einstein 方程式を CA から導出したとは主張しない。主張は「形が自動で係数が非普遍」という構造が三つの導出に共通する、ということだけである。
- 臨界カシミール振幅の普遍性は文献の結果であり（📚）、本書の模型で測ってはいない。
- §83-3-2 の $G = \ln k/\varepsilon^{d-2}$ は同定であって導出ではない。第 35 章の $G = 3/(2c)$ と整合するかは未検定である。
- §83-4-2 の対応表は第 24 章の数値と格子ガスの文献を並べたもので、同じ模型で両方を測ってはいない。
- Unruh 温度の格子対応物は定義していない。§83-6 (d) はそれを探す実験であって、あることを前提していない。

83-6. 第 4 期の課題 — 四つの測定

いずれも本書の既存の道具（付録 B、`CADoc/v2`）の規模で実行できる。実行するまで 🆕 は付けない。

(a) 臨界カシミール振幅。 第 35 章の自由フェルミオン鎖（半充填、$c = 1/2$）で、長さ L の周期鎖の基底エネルギー $E_0(L)$ を測り、$E_0(L) - L\,e_{\text{bulk}} \to -\pi c\, v_F/(6L)$ の振幅が、ホッピングの変形（μ の変更、次近接項の追加）に対して不変であること、e_{bulk} は変わることを示す。臨界点から外れた μ では振幅が $e^{-L/\xi}$ で消えることも示す。これが §83-3-1 の直接検定であり、同時に「e_{bulk} は非普遍」が第 5-1 節の宇宙定数問題の格子版になる。非自由な検定として Domany–Kinzel 確率 CA の DP 臨界点でも同じ量を測る。

(b) 状態数のエントロピーと流束のエントロピー。 Life、二階形式 Life、Q2R で、一辺 ℓ のブロックの状態エントロピーと、1 ステップに境界を横切る条件付きエントロピーの変化を測り、前者が ℓ^2、後者が ℓ に比例することを示す。第 72-3 節の Clifford CA での結果を非 Clifford 規則へ広げる。得られた係数 $\ln k$ を §83-3-2 に入れ、第 35 章の $G = 3/(2c)$ と比較する。

> ⚠️ **追記（第 12 版）。** 古典の $S_l = s_0 l + C(t)$ は、一次元の規則 30, 110 について一部測定した（K409、§86-4）。非 Clifford の量子回路は 12+12 量子ビットの $t = 1$ で確かめた（K410）。Life、二階形式 Life、Q2R の ℓ^2 対 ℓ と、流束の条件付きエントロピーは未測定である。

(c) 4 階テンソルの等方性と第 24 章の対応。 HPP と FHP で応力の角度依存性を測り、異方性が波数の二次で抑制されること（次元 6 型）を示す。同時に二速度種を入れて $g(\rho)$ の不一致が粗視化で流れないこと（次元 4 型）を示す。§83-4-2 の表を同じ模型で埋める。

(d) 局所 Clausius 関係。 FHP 格子ガスで、一定速度 v で動く仮想境界を横切る運動量流束と (b) の情報流の比を測り、比が v の一次関数で表せるかを調べる。表せれば、その傾きが Unruh 温度の格子対応物の候補になる。表せなければ §83-4-1 の開いた問題が実際に障害であることの証拠になる。**どちらの結果でも章になる。**

83-7. 本章の位置 💭

第 IX 部と第 XIII 部は (B) の経路を測り、鎖の一環が規則性で切れることを見た。本章は (A) の経路を CA の言葉に翻訳し、(C) との同型を通じて、切れている場所が (B) と同じ二つ — 係数の非普遍性と Lorentz の次元 4 の破れ — であることを示した。

真空エネルギーから時空の法則が「自動的に」出る、という願いは、
形についてはすでに叶っている（第 36 章、第 60 章）。
叶っていないのは係数であり、それはカシミール効果が最初から教えていたことだった。

第 XXVI 部　重力はなぜ弱いか ― 次元は指数を、結合は係数を決める

第 84 章　$d=3$ は逆二乗を決めるが、G の小ささは決めない 💭📚

― 重力の弱さは、空間の次元の問題か、結合の問題か

第 25 章は $d=3$ が三度独立に要求されることを示し、第 35 章は規則を境界に置くと 10^{61} 問題が消えることを示した。二つの章の間に、本書がまだ正面から置いていない問いがある。**重力はなぜ、電磁気より 36 桁も弱いのか。** そしてこの問いに、CA の側から言えることはあるのか。

先に答えを置く。次元は力の距離依存の**指数**を決める。$d=3$ なら $1/r^2$ である。しかし係数 G の小ささは次元からは出ない。重力の弱さは次元の問いではなく**結合**の問いであり、結合は第 83 章の言葉で言えば「非普遍的な係数」の側にある。本章はこの問いを、排他律から出発した一つの提案を検討する形で追い、最後にホログラフィーでの具体化（第 85 章の訂正 1・3 を踏まえた形）に接続する。

84-1. 前提を一つ修正する 📚

「弱い相互作用」は逆二乗則に従う長距離力ではない。W・Z が重いため、静的な交換相互作用は湯川型

$$V(r) \propto \frac{e^{-r/\lambda}}{r}, \qquad \lambda = \frac{\hbar}{Mc} \simeq 2\times 10^{-18}\ \mathrm{m}$$

になる。§6-7 の Klein–Gordon 方程式の質量項がこの減衰長を生む。§83-1 で「カシミール効果に弱い相互作用の補正は入らない」と言ったのと同じ理由である。本章で比較するのは重力と電磁気であり、どちらも無質量の媒介による長距離力である。

84-2. Gauss 則の格子版 ― 次元は指数を決める 📚

保存される流束が、距離とともに増えるセルへ分配されると考える。空間 d 次元で半径 r の球面に相当するセル数は r^{d-1} に比例するので

$$\boxed{F(r) \propto \underbrace{C}_{\text{結合}} \cdot \underbrace{\frac{1}{r^{d-1}}}_{\text{次元}}}$$

である。前提は三つ ― 無質量の伝播、等方性、流束保存。近接相互作用なら何でもこの形になるわけではなく、第 25-1 節の格子 Green 関数（$d=1$ で線形、$d=2$ で $\log r$、$d=3$ で $1/r$）がまさにこの三つの前提のもとでの測定である。

ここで重要なのは、**次元は指数を、結合は係数 C を決める**ことである。同じ $d=3$ でも係数は自由である。陽子二つでは

$$\frac{F_G}{F_{\mathrm{EM}}} = \frac{Gm_p^2}{e^2/4\pi\varepsilon_0} \simeq 8.1\times 10^{-37}$$

であり、両方が逆二乗なので比に距離は残らない。電子二つなら $(m_e/m_p)^2$ 倍で 2.4×10^{-43} である。

> 「重力の弱さ」は一つの数ではない。比較する粒子に依る。

これは第 26 章「質量比の問い」と同じ形をしている。G の小ささを問うことは、Gm^2/e^2 という無次元比を問うことであり、質量が入る以上、質量比の問題から切り離せない。

84-3. 余剰次元による希釈 📚

係数の小ささを次元に戻す唯一の道は、重力だけが余分な n 次元にも広がるとすることである。

$$G_4 \sim \frac{G_{4+n}}{V_n}$$

余剰次元の体積 V_n で有効な重力が薄まる。余剰次元より短い距離では $F \propto r^{-(2+n)}$、長い距離で r^{-2} に戻る（Arkani-Hamed–Dimopoulos–Dvali）。**弱さだけからは n は決まらない。**V_n と形が要る。

本書ではこの道が第 33 章「隠れた次元」に対応する。第 33 章は隠れ次元を質量階層の機構として検討し、不変量が $I \geq 2$ に閉じ込められて §32-5 の $32/27$ に届かないことを示した。**重力の希釈と質量比の生成が同じ隠れ次元から出るかどうかは、第 33 章の枠組みで問える**が、本書はまだ問うていない。第 4 期の候補として記す。

84-4. 排他律は重力にならない ⚠️

「存在できる状態への制限が力として現れる」という提案を検討する。出発点として正しい部分がある。

フェルミの排他律は「同種フェルミオンは同じ一粒子状態を占有できない」であり、「同じ場所に存在できない」ではない。この制限のもとで粒子を狭い領域に詰めると高い運動量の状態まで埋める必要が生じ、零温度・非相対論的なスピン $\frac{1}{2}$ の理想フェルミ気体では

$$P = \frac{\hbar^2}{5m}(3\pi^2)^{2/3} n^{5/3}$$

の縮退圧が生じる。**新しい媒介粒子を導入せずに、状態の制限から圧力が出る**実例である。第 8 章の「E/n が $-4.04 \to -3.33$、Pauli 圧」はこれの CA 版で、第 12 章「拘束が相互作用を強制する」は、さらに、その模型の局所拘束のもとでは bilinear で書ける自明でない力学が 0 個であることを示した（一般論ではない。§87-6）。

しかし、これをそのまま重力と考えることはできない。

排他律による圧力	重力に要る性質
圧縮に抵抗する（斥力）	通常の物質間で引力
占有状態・密度・粒子種に依る	組成によらず同じ自由落下
フェルミ統計に由来	光、ボース粒子、結合エネルギーにも作用
真空中に普遍的な $1/r$ を生まない	遠く離れた物体間にも作用

とくに組成依存は厳しい。MICROSCOPE はチタンと白金の自由落下の差を 10^{-15} の精度で測り、等価原理の破れを見ていない 📚。

> 拘束は相互作用を生む（第 12 章）。しかし**その相互作用が重力である理由**は、拘束からは出ない。

第 12 章と本節は矛盾しない。第 12 章が示したのは「相互作用の存在」であり、本節が言うのは「その相互作用の種類」である。

84-5. 背景の変形 ― 引力を作る最小の模型 💭

提案を一段広げる。

> 物体の存在が背景の許される状態を変え、その背景が二つの物体をまとめて配置した方が低エネルギーになる。

この形なら引力を作れる。量子的な実例がカシミール効果である（§83-1）。境界条件が場の状態を変え、物体間に力が生じる。ただしそれは物質・形状に依存する電磁的な効果であり、重力ではない。

近接セルの模型として最小の形で書く。**以下は仕組みを調べるための仮説的な模型であり、排他律から導出した理論ではない。**　各セルの背景状態の変形を χ とし、隣どうしの値が違うとエネルギーを要するとする。長波長表示は

$$E[\chi;\rho] = \int d^3x \Big[\frac{K}{2} |\nabla\chi|^2 + g\rho\chi \Big]$$

である。ρ は物体の質量密度、$K>0$ は背景の変形に対する硬さ、g は物体が背景に働きかける強さ。勾配項は格子上では「隣接セルの差の二乗」である。物体の位置を固定して背景のエネルギーを最小化すると　$K\nabla^2\chi = g\rho$、無限遠で変形が消える条件で点状の物体の変形は　$1/r$、二物体間のエネルギーは自己エネルギーを除いて

$$\boxed{V_{\text{eff}}(r) = -\frac{g^2}{4\pi K}\frac{m_1 m_2}{r}, \qquad G_{\text{eff}} = \frac{g^2}{4\pi K}}$$

である。逆二乗の引力が出る。

この模型が示すのは、**空間を　3　次元のままにしても、背景への結びつきが小さいか、背景が変形しにくければ、弱い長距離引力を作れる**ということである。意味を持つのは g^2/K の組合せで、変数の単位を変えて弱く見せる話ではない。

「相互作用の要素の増加」を組み込む余地がここにある。背景の変形に多数の内部自由度が同時に関わり、そのエネルギーコストが加算されるなら

$$K_{\text{eff}} \propto N \quad\Longrightarrow\quad G_{\text{eff}} \propto \frac{1}{N}$$

LIZARD LLC

となりうる。**ただし g が同時に増えない場合に限る。** 自由度を増やしただけで必ず希釈されるわけではない。そしてこの N は余剰空間の次元数ではなく、**一つの集合的な変形を支える内部状態の数**である。量子状態空間の次元をそのまま「力が広がる方向の数」とは読めない。

この模型の欠陥を三つ、先に書く。

1. 背景に質量項 $\frac{\mu^2}{2}\chi^2$ が生じれば、力は湯川型の短距離力になる（84-1 の逆）。
2. g が粒子種ごとに違えば等価原理を破る。84-4 の組成依存がそのまま戻ってくる。
3. スカラー変数一つでは、重力波も光の曲がり（Einstein の $2\times$ Newton）も出ない。テンソル構造が要る。

この四つを「四つの性質」と呼ぶ。

84-6. ホログラフィーでの具体化 📚

四つの性質を、低次元の境界にある同じ量子構造へ結びつける道筋がある。`Holographic_Gravity_From_Constraints_ja.md` の整理を、第 85 章の訂正 1・3 を踏まえて要約する。

目標とする対応は、空間 2 次元＋時間の境界と、空間 3 次元＋時間のバルク、標準的には $\mathrm{AdS}_4/\mathrm{CFT}_3$ である。第 35 章の一次元鎖はこれより一空間次元少なく、そこで得た G_3 は G_4 ではない（§85-1）。増える空間方向 z は境界の粗視化スケールに関係するが、任意の粗視化回路が滑らかな空間を作るわけではない。

中心的な境界データは、保存されたエネルギー運動量テンソル T_{ab} とその相関関数である。 ユニタリな CFT_3 を仮定し、

$$\langle T_{ab}(x)T_{cd}(0)\rangle = C_T\,\frac{\mathcal{I}_{ab,cd}(x)}{|x|^6}$$

で応力相関の規格化係数 C_T を定義する。弱く曲がった Einstein 型のバルクが存在する範囲では、規約依存の正数 a_T を用いて

$$\boxed{\frac{G_4}{L^2} = \frac{a_T}{C_T}}$$

である。物理単位では左辺は ℓ_P^2/L^2。**L と同程度のスケールでの小さい重力結合が、大きな C_T に対応する。** これが 84-5 の g^2/K の具体化である。固定した幾何変形 h の二次作用の係数が C_T に比例し、$h_{\mathrm{can}} \sim \sqrt{C_T}\,h$ と規格化すれば頂点に $C_T^{-1/2}$、交換振幅に C_T^{-1} が現れる。

$$K_{\mathrm{eff}} \sim C_T, \qquad \left(g^2/K\right)_{\mathrm{dimensionless}} \sim C_T^{-1}$$

四つの性質は次のように境界に結びつく。

求める性質	境界側の条件	バルク側の帰結と限定
長距離性	正確な T_{ab} の保存、適切な臨界的連続極限	辞書の下で保存 T_{ab} は無質量スピン 2 場に対応。ただし AdS の長距離性と平坦空間の $1/r$ は同じではない
普遍的結合	同じ全 T_{ab} に対する Ward 恒等式	粒子種によらずエネルギー運動量に従って結合。$\lambda_{OO\hat{T}} \propto \Delta_O/\sqrt{C_T}$ ― 「同じ数値」ではなく「同じ法則」
テンソル構造	保存されたスピン 2 演算子とその相関、高スピン励起の制御	計量揺らぎ h_{AB} の候補。Einstein 型の相互作用には二点関数以外の条件も要る
小さい結合	$C_T \gg 1$ と大 N 因子化	頂点 $C_T^{-1/2}$、交換 C_T^{-1}

この表を「保存則があれば重力が出る」と読んではならない。 保存 T_{ab} は自由場にもある。Einstein 型の局所バルクには、大 N 因子化、軽い一粒子相当演算子の疎なスペクトル、高スピンへの大きなギャップが要る（Heemskerk–Penedones–Polchinski–Sully）。**これが第 37 章「疎性の壁」の正体を境界側の言葉で言い直したものである** ― 障害は自由度の総量ではなく、重力として残る集団的自由度の選別である（§85-3）。独立な自由フェルミオンを N 本並べれば C_T は N 倍になるが、コピーごとに保存 T が残り、高スピンの保存流も多数残るので、条件を満たさない。

エンタングルメントとの接点は、相対エントロピーの二次変分にある。辞書が成り立てば、その Hessian（量子 Fisher 情報計量）は重力摂動の canonical energy に対応する。ただし §85-2 で撤回したとおり、**二次変分が正であることだけでは辞書の成立を示さない**。「多くのもつれがあ

れば必ず弱い重力」ではなく、「適切な幾何として符号化される状態族について、その応答の規格化が弱い重力結合を決める」が正確な言い方である。

84-7. 重力と電磁気の比は、別の問いである 📚

小さい G_4/L^2 が得られても、電磁気に比べた重力の極端な弱さが説明できたとは限らない。境界の保存電流の二点関数係数を C_J とすると、AdS_4 の Maxwell 場との標準的な対応では $e_4^2 \sim C_J^{-1}$、$G_4/L^2 \sim C_T^{-1}$ であり、質量 m・電荷 qe_4 の粒子どうしでは

$$\boxed{\frac{|F_G|}{|F_{\mathrm{EM}}|} \sim \frac{C_J}{C_T}\,\frac{(mL)^2}{q^2}}$$

である。**C_T だけを大きくしても、C_J や mL が同時に変わるなら、観測された比を説明したことにならない。** 電流と応力の規格化、物質のスペクトルを、同じ境界理論で求める必要がある。84-2 の「重力の弱さは一つの数ではない」がここで具体的な形を取る。

これに伴い、第 35 章に訂正枠を置く。「10^{61} 問題が消える」は Bekenstein 束との比についての言明であり、G/e^2 の比を導いたものではない。また Planck 長でセルを切った時点で G を使っているので、そのセル数から G を説明すると循環になる（§85-1）。

84-8. 具体例と限定 📚

低次元の量子理論と四次元の重力セクターが共存する具体例に ABJM 理論（$2+1$ 次元の $U(N)_k \times U(N)_{-k}$ 超共形 Chern–Simons 物質理論、大 N で $\mathrm{AdS}_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$ 上の M 理論と双対）がある。制約・強い量子相関・低次元からの重力記述が同居する例である。ただし内部空間・超対称性・多数の場を含み、本書の有限状態・有限近傍の CA ではない。内部空間と AdS 半径の分離がない状況では、局在源について「内部次元が見えず、曲率も無視できる」広い四次元 Newton 領域が自動的には得られない。ABJM の分配関数を補助的な Fermi 気体として扱う手法もあるが、その Fermi 統計を重力の原因となる排他律と読み替えてはいけない — 84-4 と同じ注意である。

84-9. 何を主張しないか ⚠️

- 排他律から重力は出ない（84-4）。第 12 章の「拘束が相互作用を強制する」は相互作用の存在についての定理であり、種類については何も言わない。
- $G_{\mathrm{eff}} = g^2/4\pi K$ は仮説模型である。逆二乗と引力までは再現するが、等価原理・テンソル構造・長距離性の保証はない。
- $G_4/L^2 = a_T/C_T$ は AdS（負の宇宙定数）で制御されたホログラフィック辞書の下の関係であり、未知の CA について常に成立する定義ではない。現実の膨張宇宙・正の宇宙定数・標準模型への適用は別問題。
- 本書の自由フェルミオン CA から四つの性質が同時に導出されたわけではない。
- 本章は計算を含まない。

84-10. 第 4 期の課題 — 未実施

`Holographic_Gravity_From_Constraints_ja.md` 末尾の表をそのまま置く。**すべて未実施である。**

調べる対象	必要な観測・計算	この段階だけでは主張しないこと
空間 2 次元の境界量子模型	状態代数、局所的更新、保存量、基底状態、臨界性を定義する	古典 CA から量子論を導出したとはしない
エネルギー運動量	長波長で T_{ab} の保存、等方的な相対論的スケーリング、C_T を測る	保存 T があるだけで重力とはしない
励起の選別	軽い一粒子相当演算子、余分な保存スピン 2、高スピンのギャップを調べる	大 C_T だけで Einstein バルクとはしない
符号化と領域整合性	同じ低エネルギー演算子の複数領域からの再構成、領域を重ねたときの整合性	一つのエントロピー曲線で幾何を確定しない
面積・応力の辞書	複数形状のエントロピーと応力相関から同じ G_4/L^2 が得られるか	RT で G を定義しただけなら独立検証と呼ばない
動的な重力	境界から再構成したバルク摂動のテンソル方程式、遅延応答、canonical energy を独立に計算	第一法則や正の二次応答だけで合格にしない（§85-2）
普遍性	複数の物質演算子について $OO\hat{T}$ の Ward 関係を照合	同種の二粒子だけで等価原理を検証したとはしない
重力と他の力の階層	C_T、C_J、物質の質量に対応するスペクトルを同じ模型で測る	大 N だけで 10^{-36} 等の比を説明したとはしない
隠れ次元と希釈（84-3）	第 33 章の超格子で V_n による G の希釈と質量比の生成が同じ機構から出るか	弱さだけから n を決めない

近接セルから出発しても、粗視化した有効理論には遠方結合や高階項が生じうる。有限格子で厳密にすべての連続対称性を求めるのではなく、**どのスケール窓で誤差が抑えられるかを示す。**　三空間次元の逆二乗則を求めるなら、有効理論の短距離限界より大きく、背景曲率半径より小さい領域が要る。

84-11. 本章の位置 💭

次元は指数を決める（第 25 章、84-2）。結合は係数を決める（84-5、84-6）。
重力の弱さは係数の問いであり、第 83 章の「非普遍的な係数」の側にある。
CA の側でその係数に手が届くのは、境界の C_T と C_J を同じ模型で測ったときだけである。

第 XXVII 部　第 10 版への外部検証 — 六つの訂正

第 85 章　形についての ✅ は、係数についての ✅ ではなかった ⚠️🆕

— 第 10 版の後に受けた検証は、何を返したか

第 82 章は、第 9 版に名指しされた三つの欠落を第 10 版がどう埋めたかを記録した。本章はその続きで、**第 10 版そのものが受けた検証**を記録する。検証は二つの文書として届いた。`Holographic_Gravity_From_Constraints_ja.md`（2026-09-13、第　35–37・58–60　章と step32–40 の照合）と、Klein–Gordon 方程式をめぐる考察（同日、第 6 章と第 82 章の照合）である。どちらも本書の数値実験を再実行したものではなく、**式と主張の照合**である。

照合が返したのは六件の訂正である。うち一件は撤回、三件は判定の変更、一件は帰無結果の意味の反転、一件は表現の限定にあたる（撤回に伴う序の修正を含めれば限定は二件）。六件のうち三件が第 IX 部「重力とホログラフィー」に集中している。**本書の重力についての ✅ は、方程式の形についての ✅ であって、係数についての ✅ ではなかった。** これが本章の一行である。

85-1. 訂正 1 — H^2 を AdS_2 と呼んでいた。$G = 3/(2c)$ は G_3 である ⚠️

第 35 章は、自由フェルミオン鎖の $S(\ell) = (c/3)\ln \ell$ を測地線の長さと Ryu–Takayanagi で結び、$G = 3/(2c)$、測定値 $c = 0.483$ から $G = 3.109$（厳密値 3）を得た。そのとき用いた計量

$$ds^2 = L^2 \, \frac{dz^2 + dx^2}{z^2}$$

は**双曲平面** H^2 であり、これは AdS_3 時空の**等時刻断面**である。ローレンツ符号の時空 AdS_2 ではない。したがって RT で結んだ

$$S = \frac{\mathcal{L}_{\mathrm{geo}}}{4G}, \qquad \mathcal{L}_{\mathrm{geo}} = 2L \ln \frac{\ell}{\varepsilon} \implies c = \frac{3L}{2G_3}$$

は Brown–Henneaux の $c = 3L/2G_3$ そのものであり、出てくるのは**三時空次元の** Newton 定数 G_3 である。第 35 章はこれを添字なしの G と書き、第 IX 部の見出し「10^{61} 問題が消える」と並べたため、四時空次元の G_4 に届いたかのように読める。届いていない。

さらに二点。$c \simeq 1/2$ は、古典幾何が制御される大中心電荷の領域ではない。そして三時空次元の純粋 Einstein 重力には、四時空次元にある局所伝播する重力波の自由度がない。第 36 章「創発測地線は Einstein 方程式を満たす」の**測地線**の部分は H^2 の上で正しく測られているが、**「重力」と呼べる自由度は $2+1$ 次元にはそもそも無い。**

	第 10 版	第 11 版
計量の名前	AdS_2	H^2（AdS_3 の等時刻断面）
G の添字	なし	G_3
「10^{61} 問題が消える」の主張範囲	重力の弱さ	**情報量の数え上げ**（体積則 → 面積則）。G/e^2 の比は導いていない

> 第 35 章の結論「バルク量が境界から読み出せる」は残る。読み出せたのは G_3 であり、G_4 ではない。

第 35 章の冒頭表に一つ注意を足す。Planck 長でセルを切った時点で G を使っている。そのセル数から G を「説明」すると循環になる。第 35 章が示したのは Bekenstein 束との**比**（バルクなら 10^{60}、境界なら $1/\pi$）であって、G の値ではない。

85-2. 訂正 2 — 「二次の Einstein 方程式も成立する」を撤回する ❌🆕

第 36-2 節は、相対エントロピー $S_{\mathrm{rel}} = \Delta\langle H_A \rangle - \Delta S \geq 0$ が $\lambda^{1.9934}$ で立ち上がり、あらゆる摂動・両符号・全形状で正であることを測り、「正定値二次形式（量子 Fisher 情報計量）であり、これがバルクの canonical energy 正値性、すなわち二次の Einstein 方程式である」と結論した。step37 の限定事項には「バルク側の canonical energy は計算していない」と明記してあった。

この結論は撤回する。 理由は反例が解析的に書けることである。

独立な二量子ビット対を考え、各対を

$$|\psi_p\rangle = \sqrt{p}\,|00\rangle + \sqrt{1-p}\,|11\rangle, \qquad 0 < p < 1$$

とする。一方の量子ビットの縮約状態は $\sigma = \mathrm{diag}(p, 1-p)$、modular Hamiltonian は $K = -\log\sigma$ である。$p \to p+\epsilon$ と変えると、一次で

$$\delta S = \epsilon \log\frac{1-p}{p} = \delta\langle K\rangle$$

が成り立ち（第一法則）、二次で

$$D(\rho_{p+\epsilon}\|\rho_p) = \frac{\epsilon^2}{2p(1-p)} + O(\epsilon^3) > 0$$

が成り立つ（正定値二次形式）。**対どうしに伝播も空間幾何も入れていない。** それでも第 36 章が「Einstein 方程式」の証拠とした二つの性質は両方とも成立する。

本セッションで $p = 0.3$ にて再計算した（K400–K402）。

ϵ	$\Delta S / \Delta\langle K\rangle$	D/ϵ^2
10^{-2}	0.972074	2.366162
10^{-3}	0.997192	2.379444
10^{-4}	0.999719	2.380801
解析値（$\epsilon \to 0$）	1	$1/[2p(1-p)] = 2.380952$

外部文書の表と全桁一致した。

帰属を正確にする。第一法則 $\delta S = \delta\langle K\rangle$ は、$\rho = \sigma + \delta\rho$ に対する $S(\rho)$ の一次変分が常に $\mathrm{tr}(\delta\rho\, K)$ であるという**恒等式**であり、相対エントロピーの非負性と二次性は Klein の不等式である。どちらも**任意の量子状態族で成り立つ**。幾何を含意するのは、これらを**あらゆる領域・位置・向きについて一つの時空の面積変化として整合させた**ときだけである（第 36 章がやったのは一つの区間族についての検定であり、第 60 章の単調性検定がそれに一歩近いが、面積・応力の辞書を独立に置いていない）。

	第 10 版	**第 11 版**
第 36-2 節の見出し	二次の Einstein 方程式も成立する ✅	二次の応答は正である ― 必要条件 ⚠️
序-1「アインシュタイン方程式の二次までもが自動的に出てくる」	―	「線形次数の形が出る（第 36 章）。二次は必要条件のみ」に改める
付録 C-1 撤回	五件	**六件**

> 第一法則と正の二次応答は、幾何のない二量子ビットでも成り立つ。**それだけでは Einstein 方程式の検証にならない。**

二次の Einstein 方程式を検定するには、境界から決めた摂動に対応するバルクの計量と物質場を**構成し**、canonical energy の値とテンソル方程式の残差を**独立に**計算しなければならない。第 4 期の課題として第 84-9 節の表に置く。

> ❌ **追記（第 13 版）。** この訂正は半分で止まっていた。同じ反例は「線形次数の形が出る」にも当たる。§87-2。

85-3. 訂正 3 ― 「疎性の壁 ❌」は検定になっていなかった ⚠️

第 37 章は三つの試みがすべて同じ壁に当たったと書いた。相互作用を入れても相互情報量がゼロに達しない、中心電荷 c を上げても相互情報量が**きっかり** n **倍**になるだけ（I/n が 6 桁一致）、疎性が $e^{c/2}$ で破れる。

このうち第二の試みは、**検定として成立していなかった**。n 本の自由フェルミオン鎖を独立に並べれば、相互情報量は加法的に n 倍になる。これは自由場の加法性そのものであって、ホログラフィックな「大 C_T」とは無関係である。独立コピーでは $C_T^{\mathrm{total}} = nC_T^{(1)}$ となるが、コピーごとに保存エネルギー運動量テンソルが別々に残り、一つの境界理論に**束ねられていない**。RT 型の相転移は、相互作用によって一つの T_{ab} に束ねられた理論で C_T を増やしたときの**主要項**の現象である。

第一の試みにも限定がつく。有限の自由度で相互情報量が厳密にゼロにならないことは、ホログラフィーの反証にならない。古典的な RT の切り替わりは大 C_T の主要項についての現象で、バルクの量子場の相関による $O(1)$ の相互情報量は**辞書どおりに残る**。

したがって第 37 章の判定は変わる。

	第 10 版	第 11 版
判定	❌疎性の壁	⚠️主要項 I/C_T のスケーリングを**未測定**
「I/n が 6 桁一致」の意味	壁の証拠	独立コピーの加法性。検定ではない
残る主張	自由フェルミオンであることが障害	**そのまま残る**。障害の正体は自由度の総量ではなく、重力として残る集団的自由度の**選別**である

第 37 章の枠「疎性には、ゲージ拘束が状態を間引く構造が要る」は、境界側の言葉では「独立には物理的でない自由度を除き、一つの保存 T_{ab} にまとめ、不要な軽い高スピン励起を持ち上げる」となる。**判定は変わるが、方向は変わらない。**　ただし「拘束を入れれば疎性が必ず出る」という定理はなく、候補模型ごとにスペクトルを測るしかない。

85-4. 訂正 4 ― 「追加の仮定なし」の範囲を限定する ⚠️

第 II 部の冒頭（「ここに挙げるものはすべて、局所規則から追加の仮定なしに出てくる」）、第 5 章（「$\frac{1}{2}$ がゼロ点振動である。追加の仮定なしに出る」）、第 6-2 節（「新しい仮定は一つも要らない」）は、いずれも**第 2 章の三つ組 $(\mathcal{A}, \alpha, \omega)$ を前提にしたうえで**の言明である。そして本書の $\mathcal{A}$ は CAR 代数であり、第 4 章の複素構造 $\Gamma^2 = -\mathbb{1}$ を含む。**これは量子的構造を出発点に入れている。**

この点で外部文書の指摘は正しい。不確定性関係（第 5 章）と Bell 相関の議論（第 20 章、第 49 章）は、古典 CA から量子性を導いたのではなく、**量子的な代数を採用したときに何が自動的に出るか**を数えたものである。本書自身が第 18 章で「重ね合わせが作れない ❌」と書き、第 20 章で「検定されているのは決定論ではなく可換性」と書いているので、主張の間に矛盾はない。矛盾はないが、**第 II 部の書き出しが強すぎた。**

排他律（第 8 章）は事情が異なる。二値セルの hard-core 統計は古典的に出る。しかしそれが**フェルミオン**であるのは 1 次元で Jordan–Wigner が厳密な場合だけで、これは第 8 章がすでに書いている。

場所	第 10 版	第 11 版
第 II 部冒頭	局所規則から追加の仮定なしに出てくる	第 2 章の三つ組（CAR 代数と複素構造を含む）のほかに追加の仮定なしに出てくる
第 5 章	追加の仮定なしに出る	第 4 章の $\mathcal{M}$ のほかに追加の仮定なしに出る
序-1	因果律も、排他律も、不確定性関係も…自動的に出てくる	因果律と hard-core 統計は古典 CA から、不確定性関係は**量子代数を置けば**自動的に出てくる

量子 CA から相対論的場の方程式を得る研究（D'Ariano–Perinotti 系）も量子性を最初から仮定しており、文献側でもこの区別は明示されている📚。本書は同じ区別を序で明示する。

85-5. 訂正 5 ― 「基底状態を持てない」の表現を弱める ⚠️

第 17-2 節の枠「可逆 CA の準エネルギーは単位円を稠密に覆う。『最低』は存在しない」は、測定としては正しい（$L = 8$ で 9701 点、最大空隙 0.0067）。しかし外部文書の指摘どおり、問題の正確な形は「離散更新 U だけからは、**局所的で下に有界なエネルギー生成子 H が一意に決まらない**」ことである。$U = e^{-iH}$ を満たす H は無数にあり、そのうち局所的なものがあるかどうかは別の問いである。

実は第 17-3 節「帰属を正確にする」がすでにこの形で書いていた（「スペクトル条件という述語が言語に存在しない」「壊れているのではなく、まだ書いていない」）。訂正が要るのは 17-2 の枠の**断定の強さ**であり、17-3 との整合である。

	第 10 版	第 11 版
第 17-2 節の枠	「最低」は存在しない	「最低」を定義する生成子が U から一意に決まらない
第 74 章との関係	別の章	**同じ問題の別の顔**。第 74 章の「生成子の不在」は時間発展の生成子、第 17 章は同じ生成子のスペクトル条件

> ⚠️ **訂正（第 13 版）。** 「第 17-3 節がすでにこの形で書いていた」は誤りである。§17-3 は「不等号が定義できない」と書いており、表の第 11 版の形とは異なる。§87-7。

85-6. 訂正 6 — ドブロイの関係ではなく、分散関係が壊れる ⚠️

章立て案の §6-8 に置いた訂正枠を、ここにも記録する。第 6-5 節「格子の上ではドブロイの関係は厳密ではない」は帰属が不正確である。結晶運動量を $p = \hbar k/a$ と定義すれば $\lambda = 2\pi/k = h/p$ は定義により厳密で、壊れるのは $p = \gamma m u$、すなわちエネルギー・運動量・速度を結ぶ相対論的関係である。第 6-5 節の測定量 $(\gamma\theta u - k)/k \simeq -k^2/6 - \theta^2/3$ はまさにその破れを測っている。結論「ずれは（質量）^{2}」は変わらない。

85-7. 六件を並べて見える形 💭

#	対象	種別	何が過剰だったか
1	第 35 章	判定を改めた	G_3 を G と書いた — **次元**
2	第 36-2 節	**撤回**	必要条件を十分条件と読んだ — **係数**（canonical energy の値）
3	第 37 章	帰無結果の意味が反転	加法性を壁と読んだ — **係数**（I/C_T の主要項）
4	第 II 部	表現の限定	代数の仮定を数えていなかった — **前提**
5	第 17 章	判定を改めた	「無い」を「決まらない」と書くべきだった — **一意性**
6	第 6-5 節	判定を改めた	ずれの帰属 — **定義**

1〜3 が第 IX 部に集中し、そのうち 2 と 3 は同じ形をしている。**測った量は本物で、測れていた。過剰だったのは、その量が「形」だけでなく「係数」まで決めると読んだことである。** 第一法則は形を、canonical energy の値は係数を担う。相互情報量の加法性は形を、I/C_T の主要項は係数を担う。

> ⚠️ **限定（第 13 版）。** 「第一法則は形を担う」も強すぎた。第一法則は恒等式で、形の証拠にならない（§87-2）。「測った量は本物」はそのまま残る。

これは第 XXV 部（第 83 章）が理論の側から言ったことと同じである。真空エネルギーの差分は普遍的で絶対値は非普遍的、方程式の形は対称性から自動的に出て係数は微視的規則に依る。第 60 章の「スケーリングとしての面積則は出るが、係数は出ない」、第 82 章の「生成子の在り処は得たが、大きさは得ていない」、そして本章の 2 と 3 — **同じ場所で四度、形は出て係数は出なかった。** 付録 D に D-8 として加える。

第 IX 部の ✅は形についての ✅である。
係数についての ✅は、本書にまだ一つもない。

85-8. 方法に加わった一つ 🆕

第 82-6 節は第 10 版で方法に加わった三つ（下見・威力計算・模型の族の範囲）を記した。本章から一つ加える。

幾何を含意すると主張する量は、幾何のない模型で同じ量を先に計算する。

訂正 2 の反例は二量子ビットで、紙と鉛筆で書ける。第 36-2 節を書く前にこれを書いていれば、「正定値二次形式 = 二次の Einstein 方程式」という等号は置けなかった。訂正 3 も同じで、独立コピーの相互情報量が n 倍になることは走らせる前に分かる。**「この量が幾何のない系でも出るか」を、幾何を主張する前に問う。** 第 4 期以降の標準手順に加える。

85-9. 何を主張しないか ⚠️

- **第 IX 部の測定値を撤回してはいない。** $c = 0.483$、第一法則の比 1.000327、$S_{\mathrm{rel}} \propto \lambda^{1.9934}$、$I/n$ の 6 桁一致はすべてそのまま正しい。撤回したのは、それらから「二次の Einstein 方程式」を読んだ**推論**である。
- **ホログラフィーが成立するとも、しないとも言わない。** 訂正 3 は「❌ を ⚠️ に戻す」であって「✅ にする」ではない。主要項のスケーリングは未測定である。
- **外部文書の指摘を全件そのまま採用してはいない。** 訂正 5 は第 17-3 節がすでに正しく書いていたので、表現の統一にとどめた。「一般相対論まで導出できた」という表現は本文になく、第 82 章はすでに「応答振幅 12%、量子化未完」と書いている。
- **反例の再計算（K400–K402）以外に、本章で新しい数値実験は行っていない。**

第 XXVIII 部　第二法則 ― 量子論の定理は格子に載るか

この部で明らかにしたいこと。 第 75 章は可逆 CA の矢を「非典型的な初期条件＋粗視化＋混合性」と分解し、第二法則を**証明していない**と書いた。Chiba–Yoneta–Hamazaki–Shimizu（2026）は閉じた量子多体系で第二法則の二つの形を定理にした。その証明は CA に載るのか。載るなら、何が量子力学に固有なのか。

第 86 章　第二法則は格子に載るか ⚠️🆕

― Planck の原理とエントロピー増大則を、可逆 CA と QCA で裁く

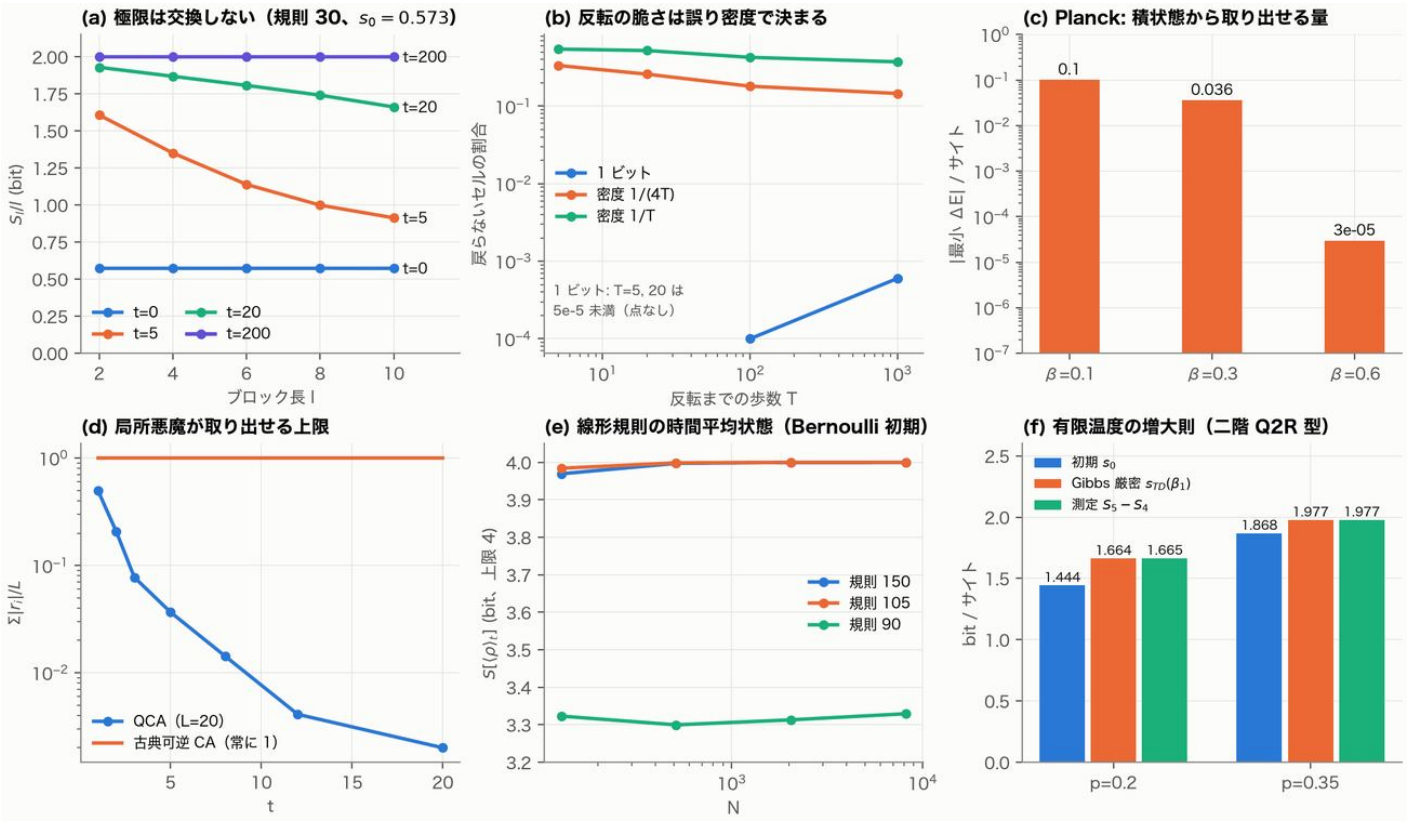


図 86-1. (a) K409。規則 30、$s_0 = 0.573$。固定した t では l を伸ばすと s_0 へ向かい、固定した l では t を伸ばすと上限へ向かう。(b) K416。反転時の誤りで戻らないセルの割合。(c)　K414。同じエネルギーの積状態から一様プロトコルで取り出せる量。Gibbs　状態では厳密に　0。(d) K419。一層の局所操作で取り出せる上限。(e) K418。Bernoulli 初期の時間平均状態のエントロピー。(f) K415。二階 Q2R 型の初期エントロピー、Gibbs 厳密値、測定値。

結論を先に置く。

(i) iMATE とマクロ操作の第二法則は可逆 CA と QCA に載る。局所性が厳密な分、論文より強い形になる。
(ii) ただしこの形は非可換性をほぼ使わない。**古典可逆 CA でも成り立つ。**
(iii) 量子に固有なのは、局所熱平衡（MITE）、局所悪魔への受動性、一様な純粋状態からの熱化である。
(iv) エネルギーの存在と符号、外部操作、熱化そのものは CA から出ない。
(v) 不等式は時間対称である。矢の起源は説明しない。
(vi) 増大則は有限サイズの不等式から導ける。古典と量子の差はその境界項（Araki–Lieb）に現れる。

⚠️ **限定（第 13 版）。** (i) の「第二法則」は、iMATE と巨視的操作についての Planck の不等式と、エントロピー密度の保存と下限に限る。熱化、時間の矢の起源、有限温度の増大則の証明は含まない（§86-5、§86-14、§87-10）。

86-1. 論文が証明したこと 📚

Chiba らの定理の骨格は次のとおりである（PRX Quantum **7**, 043023）。

部品	内容
加法的観測量	$A_L = \sum_r \alpha_r$（α の局所性 l は L に依らない）
マクロ等価	すべての加法的観測量の密度が $L \to \infty$ で一致する
iMATE	Gibbs 状態とマクロ等価な状態。純粋状態を含む
マクロ操作	$H(t) = H - \sum_\mu f^\mu(t) B^\mu$ が生成するユニタリ。B^μ は加法的、f^μ は L に依らない
マクロエントロピー密度	$s^{\mathrm{mac}} = \lim_l \lim_L S_{\mathrm{vN}}[\rho^{\mathrm{ave}}_{L\|l}]/l^d$（$\rho^{\mathrm{ave}}$ は縮約密度行列の空間平均）

主な結果は四つである。

1. **定理 1:** $t = O(L^0)$ のマクロ操作はマクロ等価を保つ。
2. **系 3（Planck の原理）:** $\beta \geq 0$ の iMATE から、$t = O(L^0)$ のマクロ操作で示量的な仕事は取り出せない。
3. **定理 2:** iMATE では $s^{\mathrm{mac}} = s^{\mathrm{TD}}$。
4. **定理 3・4（増大則）:** 緩和の仮定のもとで s^{mac} は減らない。

時間 $O(L^0)$ は最適である。$t = \omega(L^0)$ では反例がある（命題 5, 6）。論文自身が、反例は Loschmidt の逆理に近いと述べている。

本書の量との対応。 第 75 章の $S(t)$ はブロック長 4 の経験分布の Shannon エントロピーである。これは $\rho^{\mathrm{ave}}_{L|4}$ の対角のエントロピーそのものである。第 75 章は、知らずに $s^{\mathrm{mac}}_{l=4}$ を測っていた。

86-2. 埋め込み — CA の 1 歩はマクロ操作である ✅🆕

二階 CA $U : (a, b) \mapsto (b, f(b) \oplus a)$ は

$$U = \Big[\prod_i \mathrm{SWAP}_{a_i b_i}\Big] e^{-i\pi B}, \qquad B = \sum_i P^f_i(b)\, \frac{1 - X_{a_i}}{2}$$

と書ける。B も SWAP の生成子も加法的で、f^μ は有界で L に依らない。したがって定義の形はそのまま満たされる。

K411。 環 $N = 3$（6 量子ビット）で、規則 30, 110, 150 について大域位相を除いた行列誤差は 4×10^{-15} 以下だった。

第 17 章の「時間発展の群は $\mathbb{Z}$」は、ここでは障害にならない。各歩を実現する時間依存の生成子は書ける。書けないのは、U から一意に決まる局所で時間に依らない下に有界な H である。

86-3. 誤差のない応答定理 ✅🆕

半径 r の並進不変な可逆 CA または QCAα について、局所性 q の加法的観測量の Heisenberg 発展は、局所性 $q + 2rt$ の加法的観測量に**厳密に**なる。Lieb–Robinson の尾はない。したがって次が言える。

$$\boxed{\rho^{\mathrm{ave}}_{L|q+2rt} = \sigma^{\mathrm{ave}}_{L|q+2rt} \implies \mathrm{Tr}[\rho(t) A_L] = \mathrm{Tr}[\sigma(t) A_L] \quad (\text{有限の } L \text{ で等号})}$$

σ を環の Gibbs 状態に取れば、Planck の原理も有限サイズの厳密な不等式になる。空間的に一様でない操作では、境界に $O(L^{d-1})$ の補正が残る。

K408。 4 文字の de Bruijn 配置（$L = 65536$、位数 8）は、8 ブロックの頻度が厳密に一様な**単一の配置**である。これは論文の Example 2 の厳密版にあたる。全 256 規則の $q = 1, 2, 4$ で整数の頻度を比べた。

- 閾値 $t \leq (8 - q)/2$ の内側での不一致は **0/2048** だった。
- 規則 30, 110, 45, 150, 90, 105 は、閾値の 1 歩先で必ず破れた。

K417（命題 5 の古典版）。 距離 $2T$ の相関対をシフト CA で近づける（$T = 64$、$L = 2^{20}$）。相関対の距離 $2(T - t)$ が窓 l より短くなると S_l/l が下がるはずである。測った時刻（$t = 0, 32, 62, 63, 64$）では、$l = 8$ は $t = 62$、$l = 4$ は $t = 63$、$l = 1$ は $t = 64$ で下がり、光円錐のとおりだった。到達する値は 1 bit/サイトで、Bell 対なら 0 に届く。**この例での違反の大きさだけは量子のほうが大きい。** その差の出どころは §86-5 で特定する。

86-4. 有限時間ではエントロピー密度は動かない ✅🆕

逆写像の半径も r の場合を書く（二階 CA はこの場合である）。空間平均は並進不変な発展と交換する。古典では時刻 t の l ブロックは時刻 0 の $l+2rt$ ブロックの関数なので

$$\boxed{S_{l-2rt}(0) \le S_l(t) \le S_{l+2rt}(0)}$$

が成り立つ。QCA では $\alpha^t(\mathcal{A}_{C_l})$ が $\mathcal{A}_{C_{l+2R}}$（$R=rt$）の因子なので、Araki–Lieb から

$$S_l(t) \le S_{l+2R}(0) + 2R\log D$$

となり、逆向きも同様である。どちらの補正も境界項なので、固定した t で

$$s^{\mathrm{mac}}[\alpha^t\omega] = s^{\mathrm{mac}}[\omega].$$

有限時間で s^{mac} は**増えも減りもしない**。これは論文の系 2（有限時間では熱化しない）の、エントロピー側の表現でもある。QCA に限らず、並進と交換する自己同型での不変性は Mohari が別の経路で得ている 📚。ここでの価値は、CA の光円錐から数行で出ることにある。

K409（古典、$L=2^{24}$、Bernoulli 0.05、$s_0=0.5728$）。 不等式の違反は **0/180**。規則 30 の S_l/l は次のとおりである。

t	$l=2$	$l=6$	$l=10$	$S_{10}-S_9$
0	0.573	0.573	0.573	0.573
5	1.607	1.139	0.914	**0.571**
20	1.929	1.807	1.662	1.287
200	2.000	2.000	2.000	2.000

K410（量子、$p=0.1$、$s_0=0.469$、系 12 ＋補助 12 量子ビット）。 非 Clifford の brickwork の $t=1$ で、$(S_{l+2}-S_l)/2$ は $l=1,\dots,5$ で $0.658,\ 0.634,\ \mathbf{0.469},\ \mathbf{0.469},\ \mathbf{0.469}$ だった。上限の違反は 0/7。

$$\boxed{\lim_{l\to\infty}\lim_{L\to\infty} S_l(t)/l = s_0 \ \neq\ \lim_{t\to\infty}\lim_{L\to\infty} S_l(t)/l = \log D \quad \text{(混合的な規則)}}$$

矢は、この二つの極限が交換しないことである。 第 16 章の「矢は分割の中にある」の正確な形をここに置く。$S_l(t)=s_0 l + C(t)$ の $C(t)$ は境界項で、第 83 章の「流束のエントロピー」の側に属する。

86-5. 有限サイズの不等式と増大則 ✅🆕

設定。 環 $\Lambda_L\subset\mathbb{Z}^d$ の上の並進不変な可逆 CA または QCA を α、その逆写像の半径を r' とする。プロトコルが一様な規則の有限の合成なら、半径の和を取る。状態 ρ_L を並進で平均した状態を $\tilde\rho_L$ と書く。$\tilde\rho_L$ の l ブロックの周辺が $\rho_{L|l}^{\mathrm{ave}}$ で、並進平均は発展と交換する。$S_l(t)$ は $\tilde\rho_L(t)$ の l ブロックのエントロピーである。

定理 86-1.　$R'=r't$，$M=m+2R'$，$M=kl$，$M\le L$ のとき

$$\frac{S_l(t)}{l^d} \ \ge\ \frac{S_M(t)}{M^d} \ \ge\ \frac{S_m(0) - c\,(M^d-m^d)\log D}{M^d}$$

$c=0$（古典），　$c=1$（量子）．

証明。 左の不等号はエントロピーの劣加法性である。右の不等号は次のとおり。

- 古典: 時刻 0 の m ブロックは時刻 t の M ブロックの関数なので、$S_m(0)\le S_M(t)$。
- 量子: $F=\alpha^{-t}(\mathcal{A}_{C_m})$ は $\mathcal{A}_{C_M}$ の単位的な行列部分代数なので、$\mathcal{A}_{C_M}=F\otimes F^c$ と分かれ、F^c の行列サイズは $D^{M^d-m^d}$ である。Heisenberg 描像で $S_m(0)=S(\tilde\rho_L(t)|_F)$ であり、Araki–Lieb から $S(F)\le S(FF^c)+S(F^c)\le S_M(t)+(M^d-m^d)\log D$。□

時間平均状態 $\frac{1}{T}\sum_{t<T}\rho_L(t)$ のエントロピーは、凹性から各時刻のエントロピーの平均以上であり、したがって各時刻の下限の平均以上である。

系 86-2（増大則、$L\to\infty$ が先）。 マクロ状態の列について、固定した l,t で

$$\lim_{L\to\infty}\frac{S_l(t)}{l^d} \ \ge\ s_0 := \lim_{m\to\infty}\lim_{L\to\infty}\frac{S_m(0)}{m^d}.$$

$k \to \infty$ とすれば境界項は $R'/m \to 0$ で消える。**規則も初期状態も問わず、熱化の仮定も要らない。** 時間平均状態でも、$T \to \infty$ の任意の極限点でも同じである。§86-4 の保存則と合わせると、s^{mac} は有限時間で保存し、どの有限ブロックの密度も s_0 を下回らない。平均エントロピーの affine 性と上半連続性（Lanford–Robinson 1968）📚 を使っても同じ結論に至るが、証明には要らなかった。

系 86-3（仕事の上限）。 $H = \sum_r h_r$（局所性 q）、$\beta > 0$ とする。ブロック上の Gibbs の変分原理から、$e(t)$ をエネルギー密度として（$d = 1$、エントロピーは nat 単位）

$$e(t) \;\geq\; \frac{S_M(t) - \ln Z_M(\beta)}{\beta\,(M - q + 1)}.$$

初期のエネルギー密度を e_0、それに対応する逆温度を $\beta > 0$ とする。$e_0 = f(\beta) + s^{\mathrm{TD}}(e_0)/\beta$ を使うと、取り出せる仕事は

$$\boxed{\frac{W}{N} \;\leq\; \frac{1}{\beta}\Big(s^{\mathrm{TD}}(e_0) - \frac{S_M(t)}{M}\Big) + \varepsilon_M, \qquad \varepsilon_M \to 0 \;\; (M \to \infty)}$$

で抑えられる。隠れた相関があれば $s_0 < s^{\mathrm{TD}}(e_0)$ なので、この上限は正に残る。**$s_0 = s^{\mathrm{TD}}(e_0)$（iMATE）なら、固定した t で $L \to \infty$ とすると Planck の原理に戻る。** この極限に限れば、Planck の原理はエントロピー保存と変分原理の系である。論文は二つの形を量子力学的に非等価としているが、論文の増大則は緩和を含み、仮定の組も違うので、これとは矛盾しない。

系 86-4（L とともに伸びる時間）。 $S_{m_L}(0) \geq (s_0 - o(1))\, m_L^d$ となる尺度 $m_L \to \infty$ があり、$t_L = o(m_L)$ なら、系 86-2 は $t = t_L$ でも成り立つ。論文の反例は $m_L \simeq 2T_L$、$t = T_L$ で、$t_L = o(m_L)$ を満たさない。

これは論文 §XIV の候補 (iii)「複雑な構造を持つ状態に制限する」に、**一様な規則の範囲で**定量的な形を与える。条件は隠れた秩序が尺度 m_L より内側にないことであり、S_m で測れる。体積則 $S_m \simeq s_0 m$ が $m \sim L/2$ まで続く純粋状態（Page 状態や、ETH を仮定した固有状態）なら、$t_L = o(L)$ まで増大則が延びる。$t \propto L$ では定数倍の緩んだ下限だけが残る。

純粋状態の差。 古典の単一配置の経験分布は $S_m \leq \log L$ に縛られるので、この証明書は $m \lesssim \log L / s_0$ までしか出せない。量子の純粋状態は $m \sim L/2$ まで出せる。ただし、これは**証明書の差**である。典型的な乱数配置が $t \sim \log L$ で実際に壊れるという意味ではない。

厳密に飽和する ― 量子の差は Araki–Lieb 項である。 隠れ対（距離 $2T$）で $m = 2T$、$t = T$、$M = 4T$ と置く。

	下限 $S_M(T)/M$	到達値
古典（$c = 0$）	1 bit	**1 bit**（K417, K424）
量子、最大エンタングル対（$c = 1$、$\log D = 2$ bit）	0	**0**（K425、論文の命題 6）

定理 86-1 は両方の場合に等号で届く。 §86-3 の古典 1 bit と Bell 0 bit の差は、不等式の第二項そのものである。

K423（古典、$L = 2^{16}$）。 単一配置の経験分布は状態そのものなので、統計誤差がない。規則 30, 110, 150、Bernoulli と Loschmidt 状態で 4707 件を検査し、違反 **0**、最小余裕 1.2×10^{-2} だった。

K424。 隠れ対 $T = 2$（$L = 2^{20}$）で、$m = 4$ の下限 1.0000 に対し実測 1.0000、$m = 6$ の下限 0.9999 に対し実測 0.9999。$T \geq 3$ は $M > 10$ となり、単一配置の容量を超えるので測らなかった。上の「証明書の差」の実例である。

K425（量子、$\mathbb{C}^4$ セル、$L = 10$ セル、並進不変）。 長距離の対に SWAP 則と一般のゲートをかけ、16 件で違反 0。SWAP 則は $t = d$ で全ブロックが $S = 0$ になる（$t = d + 1$ でまた離れる）。

K426（仕事、$p = 0.1$）。 部分相関の対（$s^{\mathrm{TD}}(e_0) = 2H(p)$）で、古典は実測 $W = 0.1002$、上限 0.148。量子は同じセルで純粋になり（$S_1 < 10^{-14}$）、局所回転で $W = 2p = 0.2$、上限 0.296。**同じ相関構造から量子は古典の 2 倍取り出す。**

K427（Haar 状態の並進平均、$L = 7$ セル）。 違反 0/4。ただし正の下限が出たのは $t = 1$, $m = 3$（$S_5/5 \geq 0.395$）だけだった。$L = 7$ では $t = 2$ で下限は負になる。

届かないもの。 不等式には $M \leq L$ が要る。論文の順序（有限の L で $T \to \infty$）の $t > (L - m)/(2r')$ には届かない。周期が $(L - m)/(2r')$ 以下の軌道なら届くが、一般には**定理 4 の Assumption 2 は消えない。** 定理は下限だけで、s_0 より上のどこへ緩和するかも言わない。また、$L \to \infty$ が先の順序では $t \sim L$ の輸送が見えないので、マクロに一様でない状態の緩和は記述しない。一様でないプロトコルでは、各マクロ部分系の内部で同じ議論が境界 $O(L^{d-1})$ を除いて成り立つはずだが、本章では書き下していない。

86-6. エネルギーはどこにあるか ⚠️🆕

Planck の原理で H に要るのは、**時間発展を生成することではなく、加法的に保存すること**である。Gibbs 状態の受動性は任意のユニタリに対して成り立ち、置換もその一種である。

K412。 全 256 の二階 ECA で、加法的保存量を局所性 q まで探した（自明な次元 4^{q-1} を除く）。

	$q=2$	$q=3$	$q=4$
非自明な保存量を持つ規則	117/256	124/256	（名指しのみ）
規則 30, 110, 45, 150, 105, 214	0	0	**0**
規則 90	2	4	8
規則 54	1	3	6

P244「少数」は外れた。　この数え方は、統計力学のエネルギーと、統計力学を妨げる局所保存則とを区別していない。その区別は　Takesue（1989）が扱った問題である 📚。保存量を持つ規則には動きの少ないものが多く見えるが、個別には確かめていない。

保存量を持たない規則の平衡は $\beta=0$ だけである。そこでは Planck の原理は等式になり（論文の系 4）、内容を失う。第 75 章の飽和値 4.000 はこの $\beta=0$ である。周期駆動の量子系が無限温度へ向かうという見方（Lazarides–Das–Moessner, D'Alessio–Rigol）📚 と同じ位置にある。

> 有限温度の熱力学には保存量が要る。第 40 章の要素 3（拘束）がここにも現れる。

符号。 Q も $-Q$ も保存する。$\beta\geq 0$ は CA の中からは選べない。不変な言い方は「$\beta=0$ から同じ側へ、さらに遠ざかることはできない」である。💭第 17 章のスペクトル条件が効くのは、第二法則についてはこの符号の一点である。連続時間そのものは定理に要らなかった。

86-7. 有限温度の模型 ― 二階 Q2R 型 ✅🆕

半径 2 の規則を置く（Q2R の二階形式を 1 次元で半径 2 に広げたもの）。

$$b_i' = a_i \oplus \big[h_i(b)=0\big], \quad a_i' = b_i, \quad h_i = \sum_{d=\pm1,\pm2} \sigma^b_{i+d}, \qquad E = -\sum_i \sigma^a_i h_i(b)$$

較正。 E は 500 歩で厳密に保存した。$q\leq 4$ の非自明な保存量は E の 1 個だけだった。Gibbs の周辺分布と s^{TD} は転送行列（16×16）で厳密に出した。

K414（Planck、雑音なし）。 $L=\infty$ の Gibbs 周辺分布の上で、サイト置換 24、二階規則 256、その 2 段合成を合わせた 12568 プロトコルの ΔE を厳密に評価した。

初期状態	$\beta=0.1$	$\beta=0.3$	$\beta=0.6$
Gibbs の最小 ΔE	**0**	**0**	**0**
同じエネルギーの積状態の最小 ΔE	-0.101	-0.036	-3×10^{-5}

$\beta=-0.3$ の Gibbs は定理の対象外で、-2.98 だった。最小が正にならないのは恒等操作を含むからである。

K415（増大則）。 Bernoulli 初期から $t=2000$–8000 の時間平均を取った（$L=2^{18}$）。

p	β_1	**初期 s_0**	**Gibbs $s^{\mathrm{TD}}(\beta_1)$**	**測定 S_5-S_4**	**L1（対 Gibbs）**	**L1（対 別初期）**
0.20	0.293	1.444	**1.664**	**1.665**	0.0043	0.0048
0.35	0.089	1.868	**1.977**	**1.977**	0.0056	0.0057

「別初期」は、低次のブロック頻度が厳密に積測度になる単一の配置（Euler 環）である。ブロック長は $p=0.2$ で 4、$p=0.35$ で 2 で、終状態の比較には異なる L を使った。これは論文の Assumption 2 の 1 模型での数値的な支持であって、証明ではない。

86-8. 量子でしか出ないもの ✅🆕

iMATE には古典の配置が入る。論文の Example 2 は計算基底の積状態、すなわちビット列である。上の法則にエンタングルメントは要らない。差が出るのは次の二点である。

(a) 局所悪魔。 配置の局所状態は常に純粋である（Bloch ベクトル $|r_i| = 1$）。**配置はどの部分も局所熱平衡にならない。** したがって MITE（局所的にも熱平衡）は古典 CA に存在しない。論文の命題 15「MITE ＋局所制御」の受動性には古典の対応物がない。

K419。 一層の局所回転で $\sum \sigma^z$ を下げられる上限は $\sum |r_i|$ である。

t	**1**	**3**	**5**	**12**	**20**
QCA（$L = 20$）	0.497	0.078	0.037	0.0041	**0.0020**
古典可逆 CA	1	1	1	1	1

配置を知る古典の悪魔はすべて取り出せる。論文の Example 5 はこの計算である。💭 閉じた宇宙では悪魔の記憶も系の一部なので、古典の第二法則は Landauer の勘定（第 15 章）で守られる。量子の MITE では、状態を完全に知っていても有限時間の局所操作では取り出せない。**守っているのは勘定ではなく状態そのものである。** 第 18 章の「置換はエンタングルメントを作らない」の裏面である。

(b) 一様な純粋状態からの熱化。 並進不変な配置は並進不変な規則で永久に並進不変である（第 1 章）。

K420。 古典では、一様な配置 4 種が全 256 規則の 100 歩で非一様になった回数は **0/1024** だった。QCA では $|0\cdots0\rangle$（$L = 20$）から S_l が次のように育つ。

t	$l = 2$	$l = 6$	$l = 10$
1	1.619	2.178	2.178
2	1.932	4.860	5.107
4	1.995	5.951	8.884
12	2.000	5.997	9.275

固定した t では l について飽和し（$\le 4t$ bit、面積則）、t を伸ばすと l に近づく。$l = 10$ の 9.275 は $L = 20$ の半分なので有限サイズの値である。**古典 CA のエントロピーの源は初期配置の空間的な乱れだけである。** 第 75 章が K232 で測った「非典型的な初期条件」には、古典ではこの下限が付く。

86-9. 固有状態 ― ETH の CA 版 ⚠️🆕

置換の固有状態はサイクル上の Fourier 和で、対角の期待値は**サイクル平均**である。したがって ETH の対角部分は「各サイクルで加法的観測量が等分布するか」という組合せ論の問いになる。サイクルをまたぐ縮退があるので、この固有基底は一意ではない。

K421。 状態で重みを付けた、ビット密度のサイクル平均の幅である。中央値は第 75 章 K234 を再現した（規則 30: 44, 147, 238, 588, 1024）。

規則	$N = 6$	$N = 8$	$N = 10$	$N = 10$ の $P(\lvert\bar{n} - \frac{1}{2}\rvert > 0.05)$
110	0.0291	0.0141	**0.0072**	0.0012
30	0.0542	0.0295	**0.0151**	0.0041
150（線形）	0.0589	0.0510	0.0289	0.0759
90（線形）	0.0833	0.0625	0.0500	0.1881

すべての規則で最大の外れは 0.5 のままだった。**弱い ETH は支持され、強い ETH は破れている。**周期的な配置の短いサイクルが原因である。この機構は Shiraishi（2018）が CA の量子エミュレーションで解析しており 📚、そこでは ETH も大きな有効次元も熱化を説明しないと結論している。本節に新しい機構はない。論文の　iMATE　の枠組みでは、緩和の仮定は個々の固有状態ではなくマクロ状態について置かれるので、この破れは直ちに矛盾にはならない。

86-10. 非可逆な規則 ✅🆕

定理 1 の前半は非可逆な CA でも成り立つ（引き戻しは加法的なまま）。受動性と増大則は全単射を使うので失われる。

K422（Life、$L = 1024$、Bernoulli 1/2 ＝ $\beta = 0$ の iMATE）。

t	0	1	20	500	2000
密度	0.499	0.274	0.164	0.056	0.037
$S_{3\times3}/9$	1.000	0.822	0.570	0.241	0.169

エントロピー密度は下がり続ける。第 15 章の消去の勘定と同じ事実を、状態の側から見たものである。**可逆性は第二法則の前提である。**　可逆性だけでは足りないことを第 75 章が示し、なければ成り立たないことを本節が示す。

86-11. 第 75 章への訂正 ⚠️🆕

(a)「線形可逆　CA　は第二法則を持たない反例」を限定する。　論文の量は、エントロピーの時間平均ではなく**時間平均状態のエントロピー**である。

K418。 ブロック長 4、上限 4 bit、窓 $t = 2000$–4000。

規則	初期	$N = 128$	512	2048	8192
150	Bernoulli 0.05	3.969	3.997	3.9998	4.000
105	Bernoulli 0.05	3.984	3.999	3.9999	4.000
90	Bernoulli 0.05	3.323	3.300	3.313	3.330

規則 150 で $S < 3.9$ となる時間の割合は $0.153,\ 0.048,\ 0.011$（$N = 128, 512, 2048$）で、N とともに減る。$N = 8192$ の 0 は回帰が窓に入らないだけなので、数えない。Bernoulli と Euler 環の終状態の差は L1 で 0.0004 以下（規則 90 は 0.0011）だった。

一方、第 75 章の局所シード初期では、規則 150 の値は $3.42 \to 2.94$（$N = 128 \to 512$）と下がる。この状態は $N \to \infty$ で全ゼロの配置に近づき、有限温度の iMATE ではない。

> 規則 150 の回帰は実在する。だが iMATE から始めれば、時間平均状態は最大エントロピーに向かう。
> 第 75 章の反例は「低エントロピーの局所シード」についての反例である。定理 4 の反例ではない。
> 規則 90 が 3.3 付近で止まるのは保存量があるからで、平衡が無いからではない（一般化 Gibbs に当たるかは未検定）。

(b)「混合性」に操作的な定義を与える。　§75-16 は混合性を未定義とした。候補は論文の Assumption 2、すなわち「マクロ等価な状態は同じマクロ状態へ緩和する」である。

(c)「1 ビットで戻らない」は系のサイズに依存する。　§75-11 の観測は N が光円錐より小さい場合の話である。

K416（規則 30、$L = 2^{20}$）。　$z = U^{-T} x_0$ の見かけの $S_8/8$ は $T = 1000$ で 1.9999 bit、真の値は 0.141 bit である。順に T 歩戻すと Q は 0.500 から 0.020 に下がる。戻らないセルの割合は次のとおりである。

T	1 ビット	密度 $1/(4T)$	密度 $1/T$
5	0.0000	0.335	0.545
100	0.0001	0.181	0.426
1000	0.0006	0.146	0.373

P242「1 ビットで回復しない」は $T \ll L$ で外れた。 脆さの閾値は誤り密度 $\sim 1/(vT)$ である。これは論文の §XIV の候補 (i)(ii)（厳密な準備と操作は不可能）に、CA で付いた数である。ただし T に対する依存は 3 点の観察で、法則として測ってはいない。

86-12. CA から出ないもの ⚠️💭

- **外部操作。** 閉じた CA に外部の $f(t)$ はない。内部の制御者は光円錐の中にしか届かないので、一様な操作を L に依らない時間で内部から作ることはできない。残る候補は初期条件に埋め込んだ一様な時計層だが、その層とのエネルギーの受け渡しは書けていない。第 71 章の「今」が前提になっている点にも注意する。
- **熱化そのもの。** 仮定のままである。本章が返したのは 1 模型の数値である。
- **矢の起源。** Planck の不等式は U でも U^{-1} でも成り立つ。初期状態の条件を課しているのであって、低エントロピーの過去を説明していない。
- **束 I との整合。** 加法的観測量は格子の並進と等時刻面を前提にする。この第二法則は、本書が Lorentz 不変性のために捨てた**規則格子の側**に住んでいる。第 77 章の因果集合へ移すには、統計的な一様性で加法性を定義し直す必要があり、未着手である。

86-13. 宣言への判定 ❌🆕

	内容	判定
P240	閾値の内側で厳密に一様、1 歩先で破れる	的中（K408）
P241	エントロピーの不等式と増分の収束	的中（K409）
P242	1 ビットの摂動で回復しない	**外れ**（$T \ll L$ では回復する。K416）
P243	線形規則の時間平均状態は 3.5 bit 以上	**部分外れ**（シード初期と規則 90 で未達。K418）
P244	保存量を持つ規則は少数	**外れ**（約半数。K412）
P245	悪魔: 古典 1、QCA は $L = 16$ で ≤ 0.05	的中（K419）
P246	Q2R の熱化と増大則	的中（K415）
P247	Planck の標本検定	**設計の失敗**（対照群に差が出ず検出力なし。K413。K414 に作り直した）
P248	サイクル平均の幅が混合則で縮む	的中（K421）。最大の外れが残ることは宣言外
P249-P254	Life、QCA の純粋・混合、規則 150、命題 5 の古典版、$q = 4$	的中（K422, K420, K410, K418, K417, K412）
P255-P258	定理 86-1 の古典・飽和・量子、仕事の上限	的中（K423–K426）
P259	Haar 状態で $t \geq 1$ の下限が正	**部分外れ**（$L = 7$ では $t = 1$, $m = 3$ のみ。K427）

K414 は P247 の作り直しで、**宣言なしに走らせた**。結果は対照群を含めて本文のとおりだが、本章で事前宣言のない主要な数値はこれだけである。

このほか、K415 の最初の実行は Euler 環の辺が 6400 万本になって止まらなかった。ブロック長を下げて走らせ直した（**設計の誤り**）。K411 は追補宣言の較正で、的中した。

較正 20 件のうち、落第または部分落第は 5 件（K412, K413, K416, K418, K427）。外れたのはまたも動力学、数え上げ、有限サイズの見積りの側で、定理の側は当たった。第 75 章と同じ非対称である。

86-14. 何を主張しないか ⚠️

- **CA 版の定理は査読を受けていない。** 定理 86-1 の証明は完結しているが、一様な規則に限る。
- **論文の定理 4 を仮定なしで再証明していない。** 極限の順序が違う（§86-5）。
- **系 86-4 は条件つきである。** 体積則の成立は仮定で、$t \propto L$ の緩んだ下限は $L = 7$ までしか数値で見ていない。
- **フェルミオン CA は扱っていない。** 定理 86-1 の量子の場合はテンソル積の分解を使う。
- **QCA の第二法則を一般の Hamiltonian 系で再証明していない。** 証明の枠が載ることを確かめ、数値で検定しただけである。
- **数値は 1 次元である**（K422 の Life を除く）。ブロック長は高々 10、有限温度の模型は 1 種類、QCA のゲートは 1 種類である。
- **保存量の探索は $q \le 4$ までで、1 サイト並進に限る。** 周期 2 の保存量は見ていない。
- **K414 は $L = \infty$ の Gibbs に対する計算である。** 単一の配置への移行は K408 と K415 に頼っている。プロトコルは小さな族に限られ、全ユニタリではない。
- **K419 は一層の局所操作の上限である。** 命題 15 の多層の場合は論文の定理に頼る。
- **Takesue（1989）は抄録の範囲でしか確認していない。**

86-15. 現在地

> 第 75 章の問い「矢はどこに住むか」に、定理の形が一つ付いた。
> 矢は極限 $t \to \infty$, $l \to \infty$ の非可換性に住み、その非可換性は有限サイズの不等式で測れる。
> 法則の形は可換か非可換かを問わず、差は境界項に現れる。
> **量子力学が第二法則に足すのは、悪魔に対する頑健さである。**

本書の通奏低音に照らすと、ここでの障害は可換性だけではない。可換でも第二法則の主要な形は残る。可換性が奪うのは局所的な熱平衡である。規則性のほうは、第二法則を支える側に回っている ― 加法的観測量もマクロ操作も並進を使う。**第 77 章で捨てた規則性と、ここで使った規則性をどう両立させるかが、次の問いである。**

参考文献（本章で追加）

- Y. Chiba, Y. Yoneta, R. Hamazaki, A. Shimizu, PRX Quantum **7**, 043023 (2026).
- O. E. Lanford III, D. W. Robinson, J. Math. Phys. **9**, 1120 (1968). 📚（抄録で確認）
- A. Mohari, Translation invariant state and its mean entropy-I, arXiv:1705.11038; 同 -II, arXiv:math/0701186. 📚（不変性の記述は II の本文で確認。I は未読）
- N. Shiraishi, Phys. Rev. E **97**, 062144 (2018). 📚
- H. Takesue, J. Stat. Phys.（1989）, Ergodic Properties and Thermodynamic Behavior of Elementary Reversible Cellular Automata I. 📚（抄録の範囲）
- J. Kari, S. Taati, J. Stat. Phys.（2015）, Statistical Mechanics of Surjective Cellular Automata. 📚（抄録の範囲）
- A. Lazarides, A. Das, R. Moessner, arXiv:1403.2946; L. D'Alessio, M. Rigol, Long-time behavior of periodically driven isolated interacting lattice systems. 📚（後者は題名と二次的な記述のみ）

第 XXIX 部　第 12 版への査読 — 二件の撤回と、縮めた断定

この部で明らかにしたいこと。 第 12 版の本文に外部の査読報告が届いた。本文だけから判定できる論理、式、係数、射程を点検したものである。指摘は 26 件。どれが正しく、どれが読み違いで、直すと本書の何が変わるのか。

第 87 章　第 12 版への査読 ⚠️🆕

— 見出しの全称は、試していない特殊な値で倒れる

先に結論を言う。

> (i) 指摘 26 件のうち 17 件は妥当、9 件は部分的に妥当、全面的な誤りは 0 件。
> (ii) 撤回は二件。「線形次数の Einstein の形が出る」と、「$p \neq 2$ はどの有限 level にも属さない」。
> (iii) 最優先とされた数値 $I_5 = 0.487$ は読み違いで、再実行でも再現した。しかし同じ節の主張は誤りだった。
> (iv) 査読の検算で、第 15 章の Life の値が一様入力の損失の約 $1/2.7$ であることも分かった。
> (v) 本章の検算 K428–K435 は**事前宣言なしで**走らせた。

87-1. 報告と、その検証

報告（`peer_review/第12版査読報告.md`）は本文 Markdown だけを読み、コードを見ずに書かれている。各指摘を本文と照合し、計算で決まるものは独立に計算した（`peer_review/pr_check.py`）。対応は次のとおりである。

検算	内容	主な結果	節
K428	べき族の干渉次数（$p \le 6$、$n \le 8$、整数振幅の厳密計算）	$p = 4$ で $I_5 = 0$、$p = 6$ で $I_7 = 0$	87-3
K429	K221, K222 の族の非負性	負の値を持つ割合 97.6%, 99.3%	87-3
K430	第 6 章の分散の厳密式	閉じた式が六点で 8 桁一致	87-5
K431	Life と ECA の一様入力の損失（全列挙）	Life 5×4 で 0.2615 bit/セル	87-4
K432	二階形式と一階規則の軌道	一致は最初の 1 歩のみ	87-4
K433	電場項のない 1 次元 $\mathbb{Z}_2$ 模型	自由鎖と 8.9×10^{-16} で一致	87-6
K434	可逆 CA の $H \ge 0$（64 状態）	構成できた。誤差 3.3×10^{-14}	87-7
K435	第 35 章のセル数を同じ幾何で	表面/BH 束 $= 4.000$	87-8

K223 の元のコードも再実行し、本文の表を本文の桁まで再現した。**他の K 番号の再実行はしていない。**

87-2. 訂正 1 — 「線形次数の Einstein の形が出る」を撤回する ❌🆕

§85-2 は二量子ビットの反例で「二次の Einstein 方程式」を撤回し、第一法則は任意の状態族の恒等式で「それだけでは Einstein 方程式の検証にならない」と書いた。そのうえで序-1 と第 87 章（当時の結び）には「線形次数の形が出る」「線形次数まで満たす」を残した。**同じ反例は線形の主張にも同じように当たる。** 第一法則は線形次数の式そのものだからである。第 11 版の訂正は半分で止まっていた。

Faulkner–Van Raamsdonk の導出（§83-3）が要求するのは、すべての領域・向きについての第一法則と、RT 辞書である。第 36 章が測ったのは一つの区間族で、バルクの計量も線形化 Einstein テンソルも構成していない。そのうえ第 58-3 節は、自由フェルミオン鎖で段 (2)（modular Hamiltonian の局所性）が成り立たないと測っている。

> 第 36 章が測ったのは線形 Einstein の**必要条件の一部**である。線形次数でも Einstein 方程式は検証していない。

測定値は撤回しない。 $c = 0.483$、比 1.000327、放物線の modular Hamiltonian、T_{00} の局所性はそのまま正しい。第 36 章の判定は ✅ から ⚠️ へ、序-1、第 38・44・83・88 章の表現を改めた。検証に要るのは、§85-2 が二次について書いたのと同じもの、すなわちバルク計量の構成とテンソル方程式の残差の独立な計算である。

87-3. 訂正 2 ― 「$p \neq 2$ はどの有限 level にも属さない」を撤回する ❌🆕

(a) 報告の読み違い。 報告は「$p = 4$ で $I_5 = 0.487$」を不可能な値とした。本文の表で 0.487 は $p = 3.0$ の値である。同じコードの再実行で 0.4872 が再現し、評価器の不具合を示す証拠はない。

(b) それでも主張は誤りだった。 $|\sum_i x_i A_i|^4$ は指示変数の 4 次の多項式なので、I_5 は恒等的に消える。報告のこの論証は正しい。

K428（$|I_n|$ の中央値）。 $p = 2, 4, 6$ の零は厳密である（ガウス整数の有理計算、各 200 例の最大が $|I_3| = 0$, $|I_5| = 0$, $|I_7| = 0$）。

p	$\lvert I_3\rvert$	$\lvert I_4\rvert$	$\lvert I_5\rvert$	$\lvert I_6\rvert$	$\lvert I_7\rvert$	$\lvert I_8\rvert$
2	9×10^{-16}	2×10^{-15}	3×10^{-15}	5×10^{-15}	8×10^{-15}	2×10^{-14}
3	2.01	0.99	0.37	0.34	0.44	0.53
4	9.86	8.70	$\mathbf{7 \times 10^{-14}}$	6×10^{-14}	3×10^{-13}	4×10^{-13}
5	15.8	37.1	18.4	6.53	4.83	2.98
6	109	457	106	99.5	$\mathbf{6 \times 10^{-12}}$	7×10^{-12}

K223 が試したのは $p = 1,\ 1.5,\ 2.5,\ 3$ だけだった。**P36 は宣言の全称を、偶数の p で試していなかった。**

(c) 正しい形。 I_{k+1} がすべての振幅で消えるとする。$\Delta_{h_1 \cdots h_{k+1}} f(0) = I_{k+1}$ で、$f(z) = |z|^p$、$f(0) = 0$ である。$\Delta_{\ldots, h+h'} f(0) = \Delta_{\ldots, h} f(0) + \Delta_{\ldots, h'} f(0) + \Delta_{\ldots, h, h'} f(0)$ から次の階も 0 になり、$\Delta_{\ldots} f(x) = \Delta_{\ldots, x} f(0) + \Delta_{\ldots} f(0)$ から任意の基点でも 0 になる。連続なので、Fréchet の定理 📚 により f は次数 k 以下の多項式である。$|z|^p$ が多項式になるのは p が正の偶数のときだけなので、

$$\boxed{\mu_p \text{ が有限 level を持つ} \iff p \in \{2, 4, 6, \ldots\}, \qquad \text{そのとき level} = p}$$

この導出は査読を受けていない。「level 2 の隣は、どの level でもない領域」は誤りで、連続族の中に level 4, 6, … が点として並ぶ。$p = 2$ が p の近傍で孤立していること（§75-4）は変わらない。

(d) level 3 の「測度」。 K221 と K222 の族は非負を保証しない。

K429。 全部分集合で調べると、任意 Hermite の族の 97.6%、任意対称三重線形の族の 99.3% が負の値を持つ（各 2000 例）。これらを「測度」とは呼べない。ただし結論は救える。$\mu = |\sum A|^2 \sum a$ $(a > 0)$ は 500 例すべてで非負で、$|I_3|$ の中央値 1.32、$|I_4| \leq 7 \times 10^{-14}$ である。**「level 2 は公理からの帰結ではない」は、非負な集合関数としては残る。** 物理的な意味、強正値性、力学は構成していない。「正真正銘」「何の問題もない」は取り下げる。

87-4. 訂正 3 ― 第 15 章の数と読み ⚠️🆕

(a) 数。 本文の $\log|X| - \log|F(X)|$ は、像の大きさだけを数える量である。一様入力のエントロピー損失 $H(X) - H(F(X))$ の**下限**にすぎない（$H(F(X)) \leq \log|F(X)|$）。

K431。 本文の像の大きさはすべて再現した。セルあたりの値は次のとおり。

系	本文	一様入力の損失
Life 4×4	0.1171	**0.3070**
Life 5×4	0.0955	**0.2615**
ECA 110, $L = 18$	0.0764	0.1078
ECA 30, $L = 18$	0.0021	0.0028
ECA 90, 150, $L = 18$	0.1111	0.1111

線形規則でだけ一致するのは、逆像の大きさがそろうからである。**「Life は約 0.1 ビットを捨てる」は、一様入力なら約 2.7 倍の過小評価だった。** しかもこの値は一様入力からの最初の 1 歩についてのものである。

(b) 読み。 二階形式は状態の定義を変えただけではない。

K432。 規則 30（$L=9$）で一階 F と二階形式の軌道を比べると、$x_{-1}=0$ でも一致は最初の 1 歩だけで、20 歩中 19 歩は一致しない。**二階形式は別の可逆力学である。**「可逆性は規則の性質ではなく、状態の定義の性質である」は、この意味で強すぎる。

(c) 熱。 ゼロになるのは論理的な消去である。熱には熱浴、温度、物理的な実装が要り、CA の中にそれらはない。「熱を出さない」は「論理的消去がない」に読み替える。2.74×10^{-22} J は Landauer の下限を当てはめた仮定つきの換算で、測定ではない。一様入力の値で同じ換算をすれば 7.5×10^{-22} J である。

87-5. 訂正 4 — 第 6 章は厳密式で書ける ⚠️🆕

報告の指摘どおり、§6-4　　のブーストは格子の対称性から出ていない。正確な分散　　$\cos\omega=\cos k\cos\theta$　　は連続の双曲線ではなく、$(\omega,k)=(\theta\cosh\eta,\theta\sinh\eta)$ は小さい k,θ での近似的な一致である。§6-4 は導出ではなく**動機づけ**と読む。§6-5 の測定は格子の量なので成り立つ。そしてブーストなしで、すべて閉じた形に書ける。$u=d\omega/dk=\sin k\cos\theta/\sin\omega$ から

$$\gamma=\frac{\sin\omega}{\sin\theta},\qquad \gamma\theta u=\theta\cot\theta\,\sin k,\qquad \boxed{\frac{\gamma\theta u-k}{k}=\theta\cot\theta\,\frac{\sin k}{k}-1}$$

K430。 (k,θ) の六点で数値と 8 桁一致した。$R^2=0.999993$ の当てはめはこの式で置き換わる。分かることが二つある。

1. $-k^2/6$ **は質量と無関係である。** $\theta\to0$ でも残る。枠の「ずれ〜(質量)²」は $k\ll\theta$ のときだけ正しい。§6-8 の「結論は変わらない」も訂正する。θ の因子 $\theta\cot\theta$ の部分が質量の二乗である。
2. $v_\varphi v_g=1-\theta^2/3-\cdots$ **は** $k\to0$ **を先に取った式である。** 一般には $(\omega/k)(\sin k\cos\theta/\sin\omega)$。

87-6. 訂正 5 — 拘束だけでは相互作用は強制されない ⚠️🆕

§12-3 の定理「局所拘束と可換なサイト間 bilinear は 0 個」は、この模型について正しい。だが「局所保存則を課せば相互作用は強制される」は言いすぎである。

K433。 電場項のない開いた $\mathbb{Z}_2$ 鎖（$N=4$）$H=\sum_b\tau^z_b(c^\dagger_bc_{b+1}+\text{h.c.})$ に Gauss 則 $G_r=(-1)^{n_r}\tau^x_{r-1}\tau^x_r$ を課すと、物理セクターは 8 次元で、固有値は偶パリティの自由鎖と 8.9×10^{-16} で一致する。1 次元ではゲージ場を消せるからである。この模型は拘束を持ち、しかも自由である。

相互作用を担っているのは、拘束と**電場項**の組である。本書の式 $U=2h[1-\cos(2\pi/N)]$ 自身が $h\to0$ で $U=0$ を与えている。高次元の静的な磁束セクター（Kitaev 2006）📚 も、各セクターでは自由である（本章では計算していない）。また連続の式の意味での局所保存則は、自由なホッピングでも成り立つ。効いているのは Gauss 型の局所拘束である。

> 拘束は相互作用の十分条件ではない。電場項つきの拘束模型で、双一次で書けない項が現れる。

第 12 章の D_2 の数値で電場項がどう入っていたかは、本章では確かめていない。「CA が現実より説明力が高い」は取り下げる。

87-7. 訂正 6 — 離散時間にも $H\geq0$ は書ける ⚠️🆕

K434。 二階規則 30（環 $L=3$、64 状態）の U から固有分解で H を作ると、$\min\operatorname{spec}H=0$、$\|e^{-iH}e^{i\phi}-U\|=3.3\times10^{-14}$ である。有限系では任意のユニタリにこれができる。

「$H\geq0$ と書こうとしても不等号が定義できない」は誤りで、§85-5 の「§17-3 はすでにこの形で書いていた」も誤りだった。正しい形は §85-5 の表の側である。**局所で下に有界な H が U から一意に決まらない。** K434 の H の局所性は問うていない。

87-8. 訂正 7 — 第 35 章のセル数 ⚠️🆕

K435。 本文は立方体の体積（L^3）、一面（L^2）、半径 L の球の BH 束（πL^2）を比べている。$1/\pi$ はその混在の産物である。半径 L の球に揃える。

	セル数	BH 束との比
バルク	9.92×10^{182}	8.25×10^{60}
BH 束 $A/4$	1.20×10^{122}	1
表面	4.81×10^{122}	**4.000**

$\sim 10^{61}$　の隔たりが桁の上で消えることは残る。「束を飽和」と　$1/\pi$　は取り下げる。ℓ_P　を使っている以上、これは重力の弱さの説明ではない（§85-1 にすでに書いた）。副題を改めた。

87-9. 縮めた断定

箇所	第 12 版	第 13 版
§1-2	「局所＋均質なら CA 以外に選択肢がない」	連続性、積位相、有限アルファベット、全シフトを明記
§1-5	「任意の規則を可逆化」「基底状態の不在」	状態集合に群を選ぶ必要がある。別の力学である。第 17 章の限定に従う
§2-2	「Hilbert 空間は分解しない」	局所代数が次数付きで、分解が局所的でない
第　3・9・73 章	「運動学的な一般相対論を完全に再現」「計量の再構成」	局所伝播速度から有効な因果構造を定義できる
第 4・5 章	真空、Dirac 海、不確定性は同一	Gaussian 状態の幾何に限定。海には H が要る。ρ_{vac} の符号を明記
第 8 章	「排他律 ✅」	局所占有の制限。反交換関係と反対称性は別に要る
第 9 章	「手で足したものが一つもない」	§85-4 の前提に従う
第 20 章	「破るのは非可換性」「非可換→Born 則→非決定性」	前提を列挙。Born 則は導出されていない
§24-1	異方性の符号	定義を明記
§24-3	「逃げ道は一つ」「必要なもの」	厳密な不変性についての言明。有効な不変性は別
第 69 章	「これは Hawking 温度である」	古典のモード変換の温度の傾き。κ　は　3　通り、誤差棒なし。切片は §74-4 へ案内
第 70・81 章	「逃げ道は閉じた」「957σ」	単一スカラー、発散形、解析性などの仮定の内側の次数勘定。σ　は統計誤差のみの形式値
第 86・88 章	「第二法則は壁ではなかった」	載るのは限定された形。熱化は載らない
第 46〜56 章	節番号が章番号より 1 大きい	見出しを直した。本文の参照はもともと章番号に合っていた
付属物	「すべて再現可能」	配布物に `code/` を同梱し、再実行の範囲を明記

87-10. 採らなかった指摘

- **$I_5 = 0.487$（$p = 4$）の不具合。** 読み違いで、不具合の証拠はない（87-3）。
- **「$\oplus$ は任意の有限アルファベットに定義されない」。** 強すぎる。任意の有限集合に $\mathbb{Z}_{|\Sigma|}$ を置ける。群を選ぶ必要があると書けば足りる。
- **「第 86 章は有限温度の第二法則の証明ではない」。** 増大則については正しい。有限サイズの Planck 不等式（§86-3）は、Gibbs と同じ周辺分布の状態について証明している。
- **「本文単独では再現不能」。** 本文単独では正しい。束は存在する。ただし第 12 版までの配布物に入っていなかったのは本書の不備である。
- **節番号のずれの範囲。** 報告は第 41〜55 章とするが、実際は第 46〜56 章である。

87-11. 方法に加わった一つ 🆕

全称の見出しを書く前に、試していない特殊な値を挙げる。

$p \neq 2$ の全称は偶数の p で倒れ、「拘束は強制する」は電場項ゼロで倒れ、「Life は 0.1 ビット」は定義を変えると動いた。どれも走らせる前に紙で分かる。§85-8「幾何のない模型で先に計算する」と同じ種類の習慣である。

87-12. 何を主張しないか ⚠️

- **K428–K435 は事前宣言なしである。** 予言が無いので、当たり外れの集計には入れない。
- **87-3(c) の定理と 87-5 の式は著者側の導出で、査読を受けていない。**
- **全 K 番号を再実行したのではない。** K100 以降の 279 番号のうち 273 は同梱の束の文書に、K401–K406 は第 11 版の草稿（`code/v11/`）に現れることを確かめたが、これは記載の確認である。K403–K407 の検算スクリプトは同梱した。K400–K402 の再計算のスクリプトは見つけられなかった。
- **K433 は $N = 4$ の 1 次元模型である。** 第 12 章の模型そのものの再計算ではない。
- **第 13・37・77〜80 章など、報告が個別に扱わない数値は点検していない。**
- **査読報告の統計への批判（探索回数の補正、系統誤差）には答えていない。** 第 80 章などの σ は、補正なしの値のままである。

第 88 章　結び ― 規則と法則

― 単純な規則は、どこまで宇宙を書けたのか

Conway の Life Game が示したのは「単純な規則から複雑な振る舞いが出る」ことだった。

本書が示したのは、次の**七つ**である。第 9 版までに五つ、第 10 版で六つ目、そして第 12 版で七つ目が加わった。

第一に、複雑さを解析できる形に留めると相互作用が消える。 そして局所拘束と電場項を置くとそれが戻り（§87-6）、四次項も、Mott ギャップも、指数的階層も、Cooper ペアも連鎖して現れる。**拘束が物理を作る。**

第二に、規則を境界に置けば空間そのものが立ち上がる。 セル数の 10^{61} の隔たりは桁の上で消え、Einstein 方程式の必要条件が測れる（線形も二次も検証ではない。§85-2、§87-2）。

第三に、質量比のような「既約な入力」は、問いを分解すると標準的な宇宙論の問いに合流する。 濾過は下限を、生成は値を、淘汰は一様性を、地平線は時刻を説明する。どれも「なぜこの値か」には単独で答えないが、**分担は確定した**。

第四に、CA が越えられなかった壁は、すべて同じ二つの性質に帰着する。

壁	原因
Lorentz 不変性（次元 4）	格子が**規則的**だから
膨張下の欠陥ピン止め	同上
Bell 不等式	代数が**可換**だから
基底状態の不在	時間が離散だから
疎性	拘束がないから
重力の生成子（第 74 章）	**前進作用素が可換だから**

> 離散性そのものは障害ではなかった。
> 障害は**規則性**と**可換性**だった。

第五に、三つの束のうち一つが形を持った。 第 XII 部は束 I ― ランダムな離散性、因果集合、物理としての収縮 ― を取り上げ、チャネル $\mathrm{diag}(a, a, a^2)$、閾値 $a_c = 2^{-1/4}$、光子とスピン 0 についての免疫定理、Lorentz 不変量ではない率 $\gamma = C(k/m^2c^2)\tanh^2(\zeta/2)$、そして名指しの最良実験を返した。返さなかったのは**数値**である。スケール k は依然として導かれたものではなく当てはめたものである。

第六に、規則性を捨てると生成子が戻る。 第 10 版でここまで来た。規則的な CA の変形代数は厳密に可換で、GR の住む「計量に依って閉じる」中間には入れない（第 74 章）。ところが規則性を捨てた離散性 ― Poisson sprinkling した因果集合 ― の上では、**変形代数は閉じる**。閉じ方は q^{ab} に依り、対角成分も非対角成分も正しい形で返ってくる（第 77–80 章）。

> **生成子は「無い」のではなく、規則的な格子の上で見えなくなっていた。**

ただし返ってくるのは**形だけ**である。振幅は $R = 0.116 \pm 0.037$ ― 連続の 12% しかない。しかもこれは百四十三件の較正の末に、**「w を決めるには 5×10^2 コア時間が要る」と走らせる前に計算して降りた**あとの数字である。

したがって判定は、第 9 版のときと同じ形で、しかし一段だけ先に進んだ場所に置かれる。

> 願いは**形において**叶った。決着をつける唯一の数値がまだ欠けている。

これは聞こえほど悪い位置ではない。自由な関数を持たずに模様を予言する理論は、たった一組の実験 ― 同じ固有時での光子一つと質量ある粒子一つ ― で殺せる。何も予言しない理論は殺せない。そして本書の側でも、$R \simeq 0.0105\,\ell T$ という三点の当てはめは、ℓ と T を独立に振れば**一節で死ぬ**。

第七に、第二法則のうち CA に載るのは、限定された形である。 iMATE に対する巨視的操作の Planck 不等式と、エントロピー密度の保存と下限は、可逆 CA の上で有限サイズの不等式になる（第 86 章）。しかも可換な古典 CA でも成り立つ。矢は規則の中にではなく、極限 $t \to \infty$ と

$l \to \infty$ が交換しないことの中にある。可換性が奪うのは局所熱平衡で、**量子力学が足すのは悪魔に対する頑健さである。** ただし定理は一様規則に限られて査読を受けておらず、熱化そのものと低エントロピーの過去は説明していない。規則性はここでは支えに回る。第 77 章で捨てた規則性とここで使う規則性をどう両立させるかは、次の問いである。

そして本書は、二回に一回外している。 K198 から K399 までの延べ 217 件の較正で、失敗は 113 件（誤った予言 72、宣言・設計の誤り 32、自分で入れた不具合　9）。この数字を巻末ではなく本文に残したのは、**外れ方の内訳が方法を変えたから**である。世界について間違えるのは仕方がない。測れない実験を設計してしまうのは、走らせる前に防げる。第 10 版で方法に加わった三つ — 下見、走らせる前の威力計算、模型の族が有効な範囲の確認 — は、すべて自分の失敗から生えたものである。

そして、これが最初の願いへの答えになっている。

> 世界が単純な法則でできていてほしい —— 捨てなくてよい。
> 世界が決定論的でないことを期待する —— 捨てなくてよい。
>
> 捨てるべきは、「単純な法則」と「決定論」が同じものだという思い込みである。
>
> 規則性を捨てると Lorentz 不変性が手に入り、その代償として法則は確率的になる。
> 可換性を捨てると Bell の実験と整合し、その帰結として世界は非決定的になる。
> そして規則性を捨てると、**重力の生成子も戻ってくる**。代償は局所性である。
>
> **単純さは、どれでも失われない。**

規則は、ただ回り続ける。**しかし、どちらへ回るかは決まっていない。**

付録 A　主要な数値の一覧

第 1 世代（四十一実験）で得られた値と、本書のために新たに計算した値（🆕）を区別して掲げる。

A-1. 幾何・対称性・自由場

事項	数値
計量の読み出し	傾き 1.00 ± 0.04、$R^2 = 0.999$
ホロノミー指数	2.0002、整列度 1.000000
幾何は相互作用を生まない	$D_2 \sim 10^{-32}$
二次形式の代数閉性	残差 10^{-15}
島の大きさ	$N=3$: 0.238、$N=12$: 10^{-6}
質量の不変量	m/v 固定で相関 0.9997、局在長が厳密式と 0.01% 一致
カイラリティ	傾き ∓ 0.99179、和 3.3×10^{-16}

A-2. 拘束と相互作用

事項	数値
Gauss 則が四次項を強制	双一次スパンからの残差 1.00（平は 5.4×10^{-15}）
ゲージ不変性を落とすと	$D_2:\ 3.07 \times 10^{-2} \to 9.08 \times 10^{-17}$
非線形性の指標	$D_2 \simeq 0.054\,\alpha$
オンサイト U	$U_q(N) = 2h[1 - \cos(2\pi q/N)]$
格子 Green 関数	$d=1$ 線形（$R^2=0.997$）、$d=2$ $\log r$（0.9996）、$d=3$ $1/r$（0.999）
次元転換	$\ln(1/\Delta)/(2\pi/U) \to 0.968$
階層	$U \approx 0.11\,t$ が 10^{-24}
Cooper ペア	$E_b < 0$、帯域幅が単一粒子の 3.8 倍

LIZARD LLC

A-3. 重力・ホログラフィー

事項	数値
Bekenstein 束	バルク 1.97×10^{60} 倍超過、境界 $0.318 = 1/\pi$
創発 Newton 定数	$c = 0.483 \to G = 3.109$（厳密 3）
第一法則	比 1.000327
局所性	切断 $R = 13$ で 1.0004、$R \sim \ln \ell$、減衰長 2.05
二次の応答（必要条件のみ。§85-2 で撤回）	$S_{\mathrm{rel}} \propto \lambda^{1.9934}$、全形状で正
疎性の破れ	$N(x < c/12) \sim e^{c/2}$、$c = 64$ で 2.6×10^{14}
長時間発展	純度が $t = 500$ でも 1

A-4. 本書の新規計算 🆕

熱力学（第 15–17 章）

事項	数値
Life の像の大きさの損失（一様入力の損失は A-8）	4×4: 0.1171、5×4: 0.0955 bit/セル/ステップ
ECA 90 / 150	ちょうど 2.0000 bit/ステップ（代数的）
二階形式	厳密に 0
Landauer 熱（300 K）	Life で 2.74×10^{-22} J/セル/ステップ
粗視 vs 微視エントロピー	S_A : $0.27 \to 1.98$、S_{total} : 4×10^{-12} で不変
可逆 CA の準エネルギー	$L = 8$ で 9701 点、最大空隙 0.0067
Floquet 帯が円周を一周	$\theta = \pi/2$ で幅 2π、空隙 3.1×10^{-3}

LIZARD LLC

Bell（第 20 章）

事項	数値
Gaussian の上限	共有ペア 2 本で $2.828427 = 2\sqrt{2}$
共有ペア 1 本	ちょうど 2.000000
可換な設定族に限ると	ちょうど 2.000000（網羅探索）
反可換三つ組（同じ状態）	2.828427（$C = -\mathbb{1}_3$）
二値性の欠陥（可換の場合）	$\sin 2t$（$t = \pi/4$ で 1.0）
臨界鎖の基底状態	最大 1.993055
Ising 鎖の基底状態	臨界点で 1.680973

電磁気学・相対論（第 21–24 章）

事項	数値
格子 Bianchi 恒等式	残差 $\leq 3.6 \times 10^{-15}$
$\mathbb{Z}_N$ 単極子	乱数配位で立方体の 36–53%
$\mathbb{Z}_N$ 総電荷	$\bmod N$ で 0、整数としては N の倍数
格子の異方性係数	$(ka)^2/36$（測定 2.777778×10^{-2}）
Planck 格子での異方性	1 eV で $\sim 10^{-58}$、100 TeV で $\sim 10^{-30}$
種依存の極限速度	粗視化で不変（ブロック $1 \to 64$ で 9.900990×10^{-3}）

質量比（第 27–33 章）

事項	数値
複合体の慣性	$M^*/(m_1 + m_2) \to 1.2131$
束縛エネルギー・半径の飽和	$E_b \to 2.1683$、$R^*/a \to 1.4824$
換算質量の可動範囲	ちょうど 2 倍
運動する原子の解離	起きない（E_b は P とともに増加）
BO 妥当性の閾値	$r \gtrsim 10$、上限なし
次元転換の感度	$2\pi t/U = 57.12$（$U/t = 0.11$）
1836 に必要な結合のばらつき	$\delta U/U = 13.16\%$
領域競合の駆動力	$d\varepsilon/d(m/v) \to -0.2500$

LIZARD LLC

領域壁（第 29 章）

事項	数値
較正：$h = 0$ での不動	3.4×10^{-13} ボンド
較正：エネルギー保存	2.1×10^{-16}
閉じた可逆系での掃引	$199.5 \to 3.2$（戻らない）
セル数固定の膨張	12 ボンドで停止（PN ピン止め）
セル追加の膨張	drift -195.6（掃引）
脱ピン止め閾値	幅 6.25 で $h_c = 1.868 \times 10^{-3}$、$T$ に依らない
閾値のスケーリング	$h_c \propto w^{-1.55}$
終端速度	$v = 0.30\, h/\nu$
淘汰の分解能	$\delta(m/v) \gtrsim 5 \times 10^{-3}$

地平線（第 30 章）

事項	数値
無限系での比	5.923
地平線 $N = 12$ での比	3.326（圧縮率 0.562）
比が 4% 以内に収まる条件	$N/\xi \gtrsim 20$
de Sitter 温度 $T = 0.12$ での比	11.698（$T = 0$ の 5.394 から）
統一条件	$H \lesssim \Delta$

剛性と保護（第 31–33 章）

事項	数値
壁の表面張力	$\sigma = 0.09319$（$J = 1.5$）
表面張力の不変量	$\sigma / (\lvert V(\Delta_0) \rvert\, w) = 0.037 \pm 0.001$
共存の上限	$\delta(m/v) < 0.48\%$
剛性の不在（非拘束）	$d \ln \Delta_0 / dK \in [-3.92, -2.80]$
セクター探索の特別比	$r = 1$ のみ（$288 \to 295$）
拘束下の厳密平坦	$h \geq 1.8$ で残差 10^{-15}、$E(0) = -hL$ 厳密
拘束が作る閾値	$\Delta_c \simeq 0.79h - 0.94$
$U_q(N)$ の検証	全 (N, q) で差 $\leq 4.4 \times 10^{-16}$
剛な不変量	$R(N;1,3)/R(N;1,2)$: $N = 7$ で 1.15883、$N \to \infty$ で $\mathbf{1.18517}$
1836 に必要な t/h	$N = 15, q = 2, 6$ で 1.0007
梯子の密度	$N \leq 15$ で 112 段、1836 の 1.5 倍以内に 4 段
軌道の核との重なり	$r = 1 \to 1024$ で 2.47 倍のみ
離調による保護	$P_{\max} = v^2/(v^2 + (\Delta/2)^2)$、$r \sim 30$ で飽和
電子捕獲の条件 📚	$(m_n - m_p)/m_e = 2.5310$、$m_p/m_e > 725$

第 XII 部 — 収縮を物理にする 🆕

量	値
XENONnT からの CSL の窓	$r_C \gtrsim 11.8$ nm（格子起源は 25 桁の差で排除）
隠れ層の復活則	$t^* = 1.032\,L_s + 2.617$、$R^2 = 0.99996$（べきでなく一次）
DAG 上の量子測度からの CHSH	$2\sqrt{2}$（Tsirelson を飽和）
古典測度からの CHSH	厳密に 2
sprinkling、最適設定	746/746 実現で $2\sqrt{2}$、偏差 1.3×10^{-15}
異方的消去	$S_{\max} = 2\sqrt{1+\eta_A^2\eta_B^2}$ — 閾値なし
等方消去の閾値	$\gamma\tau_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2}\ln 2 = 0.346574$
保護軸のずれ（中央値）	1+1 / 2+1 / 3+1 で 0.000° / 44.17° / 59.21°
Bloch 写像、2+1	$\mathrm{diag}(0.712, 0.712, 1.000000000)$
Bloch 写像、3+1	$\mathrm{diag}(0.690, 0.678, 0.656)$
収縮の閾値（安定）	$a_c = 2^{-1/4} = 0.840896$、$-\ln a_c = (\ln 2)/4 = 0.1732868$
収縮の閾値（不安定）	$\gamma\tau_0 < 2^{1/4} - 1 = 0.1892071$（9.2% 緩い）
最長鎖	$L_{\max} \sim N^{1/(d+1)}$、実測 $0.533/0.402/0.281$
光子の保護成分	厳密に 1.000000000000000、$S_{\max} = 2\sqrt{1+a^4} > 2$（常に）
率	$\gamma = C\,(k/m^2c^2)\tanh^2(\zeta/2)$、$C = 4/3$ または 1
領域の境界	$\zeta_c = \mathrm{arcsinh}\sqrt{4D\tau}$（$\tau$ に依る。普遍値は無い）
静止から出る自由粒子	$-\ln a = (k/m^2c^2)^2\tau^2$、実測べき 1.994、係数 0.979
基準系依存性	同一軌跡で実験室 0.139407 対 共動 0.013441（10.4 倍）
対の CHSH	$S_{\max} = 2\sqrt{2}\,a_A a_B$（$8 \times 10^{-6}$ で確認）
崩壊平均	$\langle a\rangle = 1/(1+\gamma\tau_0)$、$\langle b\rangle = 1/(1+2\gamma\tau_0)$
現時点の最良の制限	$D/\gamma_{\mathrm{Planck}} < 2.47 \times 10^{-34}$（Hensen 2015、軌道速度）
提案の最良の制限	$k < 4.71 \times 10^{-38}$ kg²m²s⁻³（相対論的 e^-e^-、γ_L=10、1 km）

第 XIII 部 — 場の方程式から動力学へ 🆕

量	値
カイラリティ総和則（局所 $d(k)$、8 例）	$\Sigma\chi = 0$ 厳密。Chern 数の戻り 3.1×10^{-15}
overlap 演算子の GW 残差	1.9×10^{-15}、固有値の円周からのずれ 2.0×10^{-14}
overlap の遠距離成分（$r = 4$）	1.4×10^{-3}（Wilson は $r \geq 2$ で厳密に 0）
中心電荷	$c = 1.000271$
modular Hamiltonian の遠距離比 $\|h(3)\|/\|h(1)\|$	規則格子 0.331、因果集合 0.406、不規則標本 0.206
非局所性の赤外抑制	$\lambda^{-0.045}$（実質ゼロ）
因果集合の第一法則	6 桁一致、全 224 モードが活性
相対エントロピー	正値・べき 1.989・単調
RT 型	生で $S \propto N^{0.719}$、$\kappa = 10^{-2}$ で $p = -0.032$
逐次成長（古典）	体積則 $S \propto N^{1.060}$、順序割合を保つには $p \propto N^{-0.84}$
複素 percolation	$I_3 = 2.4 \times 10^{-16}$、$I_2 = 0.110$
逐次成長の公理（$n \leq 5$）	共変性 6.6×10^{-16}、規格化 1.8×10^{-15}、Bell 4.6×10^{-16}
純位相の唯一点	$q = e^{\pm i\pi/3}$、$\mathrm{amp}(C) = \exp[i(\pi/3)(L-I)]$、$\|\mathrm{amp}\| = 1$ 全桁
最大エントロピー	$8.481359 = \ln 4824$（古典線の最良 8.117943）
$S = (\pi/3)(L-I)$ と BD 作用の相関	0.061–0.098（秩序割合とは 0.963–0.979）
BD 作用の Bell 因果性	恒等的に 0（P の同型類 88 個中 0 個が割れる）
BD の規格化	どの β でも $\|\sum - 1\| \geq 1.98$（4 次元 ≥ 2.22）
全体規格化の量子測度	$I_3 = 4.3 \times 10^{-16}$、$I_2 = 0.179$、微視的には一様
Wick 枝 vs 古典（指標 A）	0.1510 対 0.1728（N=6）、0.1481 対 0.1906（N=7）
Wick 枝 vs 古典（指標 B）	0.1117 対 0.0975、0.1415 対 0.1053（**逆転**）
第 6 章追補：分散	$\cos\omega = \cos k \cos\theta$（球面三角形）
局在長	$\xi = 1/\mathrm{arccosh}(\sec\theta)$（数値と全桁一致）
ドブロイの関係のずれ	$-k^2/6 - \theta^2/3$（$R^2 = 0.999993$）、$v_\varphi v_g = 1 - \theta^2/3 - \theta^4/45$

A-5. 第 10 版の主要な数値（K198–K399）🆕

量	値	章
規則的 CA の前進作用素の非可換性	**厳密に 0**（合流性）	74
三択の代価: 有効近傍の裾	$\ln \rho$ で伸びる	76
因果集合の変形代数: 非対角の検出	9.3σ	80
対称性 $\varepsilon_A(c) = \varepsilon_D(-c)$（連続）	5.6×10^{-16}（機械精度）	80
形の一致（μ で 16 倍の範囲）	$\chi^2/\text{自由度} = 0.54$	80
振幅 R = 因果集合 k ／ 連続 k	$\mathbf{0.116 \pm 0.037}$	80
R の経験則（仮説）	$R \simeq 0.0105\,\ell T$、散らばり 13.6%	80
床の ρ 依存	$\propto \rho^{-0.167}$	78, 80
推定量の過分散	$\sigma_{\text{実測}}/\sigma_{\text{Poisson}} = 1.61$	80
高階則の漸近べき	$s = (D-2)/N$、D は奇数	81
到達集合の空隙	$(-1,\ 1/3)$、幅 1.33	81
D が偶数のベクトル単項式（$D \le 9$）	**0 個**（奇数側 30040 個）	81
シフト対称を捨てた逃げ道	$s = -1/(k+1)$、$k \ge 44$ で TF 指数 90（957σ で棄却）	81

A-6. 第 11 版の主要な数値（K400–K407）🆕

量	値	章
二量子ビット反例: $\Delta S/\Delta\langle K\rangle$（$p = 0.3$、$\epsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$）	$0.972074,\ 0.997192,\ 0.999719$（解析値 1）	85
二量子ビット反例: D/ϵ^2	$2.366162,\ 2.379444,\ 2.380801$（解析値 2.380952）	85
離散 KG 漸化式と Dirac ウォークの差（$\theta = 0.05$–1.5）	$\le 1.3 \times 10^{-15}$	6-7
600 ステップ往復の可逆性	4.9×10^{-15}	6-7
$(\omega^2 - k^2 - \theta^2)/(k^2\theta^2)$（$k = \theta = 0.05$）	$-0.33344 \to -1/3$	6-7
群速度の上限	$= \cos\theta$（五つの θ で六桁一致）	6-7
波束の重心速度 vs 群速度	相対差 1.8×10^{-4}	6-7

A-7. 第 12 版の主要な数値（K408–K427）🆕

量	値	章
CA 一歩と巨視的操作の表示の差（環 $N=3$、規則 30, 110, 150）	$\le 4\times10^{-15}$	86-2
応答の厳密一致（閾値内、全 256 規則、de Bruijn 配置）	不一致 $0/2048$	86-3
$S_{l-2rt}(0)\le S_l(t)\le S_{l+2rt}(0)$ の違反（$L=2^{24}$）	$0/180$	86-4
規則 30、$t=5$ の増分 $S_{10}-S_9$ と s_0	0.571 と 0.5728	86-4
定理 86-1 の違反（古典、$L=2^{16}$）	$0/4707$、最小余裕 1.2×10^{-2}	86-5
定理 86-1 の飽和（古典、$T=2$、$m=4,\ 6$）	下限と実測 $1.0000,\ 0.9999$ で一致	86-5
定理 86-1 の違反（量子）	$0/16$（Haar、$L=7$ セルは $0/4$）	86-5
仕事の上限（$p=0.1$）	古典 $0.1002\le0.148$、量子 $0.2\le0.296$	86-5
Gibbs 状態の最小 ΔE（12568 プロトコル、$\beta=0.1,0.3,0.6$）	0	86-7
同エネルギー積状態の最小 ΔE	$-0.101,\ -0.036,\ -3\times10^{-5}$	86-7
二階 Q2R 型の増大則（$p=0.20,\ 0.35$）：初期 $s_0\to$ Gibbs、実測	$1.444\to1.664,\ 1.665$；$1.868\to1.977,\ 1.977$	86-7
局所悪魔の上限 $\sum\lvert r_i\rvert/L$（QCA、$L=20$、$t=1,20$；古典は常に 1）	$0.497,\ 0.0020$	86-8
一様な古典配置が非一様になる回数（全規則、100 歩）	$0/1024$	86-8
サイクル平均の幅（$N=10$、規則 110, 30, 150, 90）	$0.0072,\ 0.0151,\ 0.0289,\ 0.0500$	86-9
時間平均状態のエントロピー（Bernoulli 初期、$N=8192$、規則 150, 105, 90）	$4.000,\ 4.000,\ 3.330$ bit	86-11
戻らないセルの割合（規則 30、$T=1000$；1 ビット、密度 $1/(4T)$、$1/T$）	$0.0006,\ 0.146,\ 0.373$	86-11

A-8. 第 13 版の検算（K428–K435、事前宣言なし）🆕

量	値	章
$p=4$: $\lvert I_4\rvert$（中央値）、$\lvert I_5\rvert$（厳密）	$8.70,\ 0$	87-3
$p=6$: $\lvert I_6\rvert$（中央値）、$\lvert I_7\rvert$（厳密）	$99.5,\ 0$	87-3
負の値を持つ割合（任意 Hermite、任意対称三重線形）	$97.6\%,\ 99.3\%$	87-3
非負な level 3 の例の $\lvert I_3\rvert$（中央値）、$\lvert I_4\rvert$（最大）	$1.32,\ 7\times10^{-14}$	87-3
厳密式	$\gamma=\sin\omega/\sin\theta$、$\gamma\theta u=\theta\cot\theta\sin k$	87-5
一様入力の損失（Life 4×4、5×4、ECA 110、30）	$0.3070,\ 0.2615,\ 0.1078,\ 0.0028$ bit/セル	87-4
電場項なし $\mathbb{Z}_2$ 鎖（$N=4$）と自由鎖の固有値の差	8.9×10^{-16}	87-6
可逆 CA の $H\ge0$: $\lVert e^{-iH}e^{i\phi}-U\rVert$	3.3×10^{-14}	87-7
半径 L の球でのバルク/BH 束、表面/BH 束	$8.25\times10^{60},\ 4.000$	87-8

付録 B　道具と規約

B-1. 共分散形式

規約: $\{\gamma_a,\gamma_b\}=2\delta_{ab}$、$\langle\gamma_a\gamma_b\rangle=\delta_{ab}+i\Gamma_{ab}$、純粋 Gaussian $\iff \Gamma^2=-\mathbb{1}$、$E=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(A\Gamma)$。

```
from scipy.linalg import schur
T, O = schur(A, output="real")
# 各 2x2 ブロックの符号を正に揃える（忘れるとエネルギーが符号反転する）
for k in range(0, n, 2):
    if T[k, k+1] < 0:
        O[:, [k, k+1]] = O[:, [k+1, k]]
```

B-2. 指標

指標	定義	意味
D_1	$\|\Gamma^2+\mathbb{1}\|_F/2N$	Gaussian 多様体からの距離
D_2	連結 4 点関数の RMS	Wick の破れ
α	四次項／二次項エネルギー	非線形性の強さ

B-3. 本書で追加した道具 🆕

CHSH 観測量（パリティ偶、二乗が 1、互いに反可換）:

$$\Sigma^A=(i\gamma_2\gamma_3,\ i\gamma_3\gamma_1,\ i\gamma_1\gamma_2),\qquad \Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3=-i\mathbb{1}$$

Wick による相関:

$$\langle(i\gamma_p\gamma_q)(i\gamma_r\gamma_s)\rangle=\Gamma_{pq}\Gamma_{rs}-\Gamma_{pr}\Gamma_{qs}+\Gamma_{ps}\Gamma_{qr}$$

Horodecki 判定式: $\mathcal{S}_{\max}=2\sqrt{\lambda_1+\lambda_2}$、$\lambda_i=\mathrm{eig}(C^{\mathsf{T}}C)$ の大きい方から二つ。

格子二体問題（重心と相対座標が分離しない）:

$$A_d=(t_1+t_2)\cos\frac{P_d}{2},\qquad B_d=(t_1-t_2)\sin\frac{P_d}{2}$$

物理セクターへの射影: ゲージ不変な Q は物理空間を保つので $P^\dagger[H,Q]P=[\hat{H},\hat{Q}]$。一度だけ射影すればよい（これを怠ると計算量が 10^4 倍になる）。

B-4. 数値上の閾値

事項	限界
厳密対角化	2^{18}（疎行列で 2^{20}）
modular Hamiltonian（倍精度）	$\ell \lesssim 10$
modular Hamiltonian（多倍長）	$\ell = 40$ で 8.4 秒（mpmath、120 桁）
保存量の探索	重み $w \le 4$
状態空間の全列挙 🆕	2^{20}（Life 5×4）

B-5. 有用な恒等式

桁落ちの回避（純粋 Gaussian なら）：

$$\mathbb{1} + \Gamma_A^2 = \Gamma_{AB}\Gamma_{AB}^{\mathsf{T}}$$

右辺は積であって差でないので、$1 - \nu^2$ が桁落ちなしに得られる。

臨界 Majorana 鎖の相関:

$$\Gamma_{ab} = \frac{2}{\pi(b-a)}\ (b-a \text{ 奇数}), \qquad 0\ (\text{偶数})$$

符号に注意 — $2/(\pi(a-b))$ と書くと h が全体反転する。

付録 C　誤りの記録

第 1 世代では四十一実験で三十件を超える誤りを踏み、**主要な結論を四度撤回した**。本書ではさらに一度撤回し、三度較正に落第した。教科書としてこの姿勢を残す。

C-1. 撤回した結論 五件

撤回	内容	原因
14 → 15	「解ける模型は物理空間で非 Gaussian」	$[H, D_j] \neq 0$ と縮退
24 → 25	「$t/g \sim 10^{24}$ は微調整」	次元転換で自然
29 → 30	「オンサイト U は全次数でゼロ」	Gauss 則を課していなかった
34 → 35	「Einstein の残差は物理」	局所部分の切断が誤り
第 29 章 🆕	**「可逆な閉鎖系では壁は動けない」**	**行き先は壁自身の運動エネルギーだった**

C-2. 本書で較正に落第した三件 🆕

場所	症状	原因
第 29 章 版 1	$h = 0$ で壁が 5.15 ボンド動く、$\|\Delta E\|/\|E\| = 5.7 \times 10^{-2}$	初期二量体化が真の Δ_0 でなかった
第 29 章 版 2	バルク値が左右とも正（キンクが溶けた）	**零モードで Schur 分岐が飛んだ**
第 32 章 版 1	$\|\|[H, G_j]\|\| = 4.0$	「局所電荷」が Gauss 則でなかった
第 32 章 版 1'	全設定で「プラトー」	探索範囲の端で最小になっていた

C-3. 判定を改めた三件 🆕

事項	第 1 世代	本書	理由
$U(1)$	❌原理的に不可	⚠️微視的には不可、**創発は可能**	量子スピン氷の創発光子 📚
Lorentz 不変性	❌ 10^{-20} の微調整	❌ただし**破れは二種類**	次元 6 は無害、次元 4 が本体
Bell	未検証	❌ **可換代数が失格。決定論は無関係**	CHSH 計算

C-4. 帰無結果の意味が反転した一件 🆕

第 32-1 章のセクター探索は $r = 1$ しか返さず、「比が存在しない縮退点」として失望とともに記録した。第 34 章で意味が反転した — **$r = 1$ は共鳴点であり、保護が破れる唯一の場所である。**

> 探索は「値がどこか」ではなく「**危険がどこか**」を正しく教えていた。

C-5. 頻出した誤りのパターン

誤り	検出のきっかけ
基底空間の縮退（七度）	$\mathrm{defect}(\Gamma) \neq 0$、ギャップが 0、零モード
「$R = 1$ が局所」という暗黙の仮定	**測っていたデータを使わなかった**
演算子基底の欠落	係数が t 非依存になる
拘束の未適用	Gauss 則は選択肢ではない
符号規約	エネルギーが厳密対角化と反転
探索範囲の端で最小 🆕	内点かどうかを検定していなかった
摂動領域の外での測定	応答が非単調

C-6. 最も効いた習慣

検算の不等式を先に用意しておくこと

すべての誤りが「結果がおかしい」ではなく**「論理的に不可能な出力」**で検出された。

- 変分限界、純度、defect、$[H, Q]$ の残差を毎回出す
- 厳密解が既知の極限で必ず較正する
- **結果を出す前に、何が通れば信じるかを宣言する**

第 20 章の CHSH では六項目、第 29 章の壁では七項目、第 32 章のセクター探索では七項目を、**結果を見る前に**検定した。

較正なしの探索は無意味である。

C-7. 半決定性の非対称性 🆕

保存量の探索と剛性の探索は、重みについて**半決定的**である。

跳びが見つかれば決定的。見つからなくても何も言えない。

第 32 章ではこれを**走らせる前に宣言した**。宣言しておかないと、帰無結果を後から都合よく解釈してしまう。

C-8. 第 3 版 — 一つの撤回と八つの校正落第 🆕

撤回。 Hensen 2015 から主張した $\gamma < 1.80 \times 10^{4}\,\mathrm{s}^{-1}$、
$\gamma/\gamma_{\mathrm{Planck}} < 9.70 \times 10^{-40}$ を撤回する。$v \sim c$ を仮定していたが
NV のスピンは静止している。軌道速度で計算し直すと $D/\gamma_{\mathrm{Planck}} < 2.47 \times 10^{-34}$、
5.4 桁弱い。§55-5 を見よ。

訂正。 §32-5 の不変量の極限は 1.18517 ではなく厳密に $32/27$ である。表の値は
$I(N \simeq 40)$ にあたる。§32-5 の訂正枠を見よ。

校正落第（宣言 31 件中 8 件）。

#	何が落ちたか	原因	私のものか模型のものか
1	クラス演算子の積の順序	`U@C` でなく `C@U`。K1–K6 は全通過した	私
2	「完全測定は D を対角化する」	必要なのは測定ではなく記録	私
3	復活のスケーリング	一次式をべき乗則として当てはめた（4 回）	私
4	sprinkling 版 1	空入力の上で走り、受理 0/24 のまま印字	私
5	両側 dephasing の式	$2\sqrt{1+\eta_A^2\eta_B^2}$ を $2\sqrt{1+\eta^2}$ と書いた	私
6	光子のチャネル	保護される 1 を直接書き込んだ（循環論法）	私
7	$\gamma = D\tanh^2(\zeta/2)$	軸は平面でなく球面を覆う。$C = 4/3$	**模型**
8	領域の境界 ζ_c	率と率を比べた。正しくは広がりと 1。ζ_c は τ 依存	**模型**

新しい常設規則が二つ。

- 不変量だけを確かめる校正の束は、誤った対象の上でも通る。 少なくとも一つの校正は **ゼロでないはず**の量を確かめねばならない（落第 1）。
- 空の入力の上で走る計算は誤りである。空集合に対する検定はすべて自明に通る。「空の上で走る」の次の失敗は「空の上で止まらない」である。（落第 4）

添字規約の誤り、これで四回目。 `kron` は部分系 0 を上位ビットに置き、`(idx>>cell)&1` はセル 0 を下位ビットに置く。この食い違いが本書全体で四つの別々のバグを生んだ。
今後は読んで確かめるのではなく assert で確かめる。

C-9. 第 9 版以降の失敗 — 延べ 113 件 🆕

K198 から K399 までの延べ 217 件の較正で、失敗は **113 件**だった。**失敗率 52%。**

種別	件数	意味
誤った予言	**72**	世界について間違えた。宣言に書いた値・符号・大きさが外れた
宣言・設計の誤り	**32**	**測れない実験を設計した。** 走らせる前に防げたはずのもの
自分で入れた不具合	**9**	コードの誤り。すべて較正または「到達集合に無い値」で捕まった

内訳のうち痛いのは二列目である。とくに次の四つは、章の結論そのものを一度書き換えさせた。

	誤り	どこで気づいたか
第 79 章	λ を A_0 に対して固定し、汚染が指数を逆向きに動かした	s_{eff} が A_0 で動く向きが予言と逆だった
第 79 章	spacelike の上限まで A_0 を上げ、連続側を caustic の中に入れてしまった	目標値そのものが 2.33 ではなく 1.68 だった
第 80 章	「幅 2.93」を統計誤差と読んだ。実際は**模型の破れ**（連続側が族の外）	比が $w \to 0$ の下限より小さかった
第 80 章	「A_0 は層の厚さの数倍必要」を三節にわたり未検証のまま制約に使った	測ったら 1.1 層でも残存率が落ちなかった

測れない実験を設計する誤りは、走らせる前に防げる。それが第 10 版で方法に加わった三つである。

C-10. 第 10 版への外部検証 — 撤回一件、判定変更三件、帰無反転一件、表現限定二件 🆕

第 10 版の刊行後、二つの外部文書（`Holographic_Gravity_From_Constraints_ja.md`、Klein–Gordon 考察、いずれも 2026-09-13）が第 35–37・58–60 章、第 6・17 章、第 II 部冒頭を照合した。第 85 章に本文を置く。ここには C-1〜C-5 の区分に従って記録する。

C-10-1. 撤回した結論（C-1 に追加、六件目）

撤回	内容	原因
第 36-2 節	**「二次の　Einstein 方程式も成立する」**	**必要条件を十分条件と読んだ。**第一法則と相対エントロピーの正二次性は任意の量子状態族の恒等式（Klein の不等式）で、独立二量子ビット対でも成立する（K400–K402）。バルクの canonical energy は計算していなかった — step37 の限定事項に自分で書いてあった

C-10-2. 判定を改めた（C-3 に追加、三件）

事項	第 10 版	第 11 版	理由
第 35 章の G	$G = 3/(2c)$、添字なし	$G_3 = 3L/(2c)$	計量は　H^2（AdS_3　の断面）。Brown–Henneaux。$c \simeq 1/2$ は大中心電荷の領域外
第　6-5　節の帰属	ドブロイの関係が壊れる	$p = \gamma m u$ が壊れる。$\lambda = h/p$ は結晶運動量の定義で厳密	測定量 $(\gamma\theta u - k)/k$ は分散関係の破れ
第 17-2 節の断定	「最低」は存在しない	局所的で下に有界な H が U から一意に決まらない	第 17-3 節と第 74 章に整合させた

C-10-3. 帰無結果の意味が反転した（C-4 に追加、二件目）

第 37 章の「c を上げても I/n が 6 桁一致」を疎性の壁の証拠として記録した。独立コピーの相互情報量は加法的に n 倍になるので、これは**壁ではなく加法性**である。ホログラフィックな検定は、相互作用で一つの T_{ab} に束ねたうえで C_T を増やしたときの I/C_T の主要項について行う。**未測定。** 判定は❌から ⚠️ へ。

C-10-4. 表現を限定した（二件）

場所	何が強すぎたか
第 II 部冒頭、第 5 章、第 6-2 節、序-1	「追加の仮定なし」。第 2 章の三つ組（CAR 代数・複素構造）を前提にしている。不確定性関係は量子代数を置いたうえで自動的に出る。因果律と hard-core 統計は古典 CA から出る
序-1	「Einstein 方程式の二次までもが自動的に出てくる」。線形次数の形が出る。二次は必要条件のみ

C-10-5. 頻出した誤りのパターン（C-5 に追加）

誤り	検出のきっかけ
幾何を含意する量を、幾何のない模型で先に計算していなかった 🆕	二量子ビットの反例が紙で書けた
加法性を構造と読んだ 🆕	I/n が「きっかり」一致することが、むしろ独立の証拠だった
添字の省略（G と G_3）	計量の名前を確かめたら断面だった

C-10-6. 最も効いた習慣（C-6 に追加）

> 幾何を含意すると主張する前に、幾何のない模型で同じ量を計算する。

訂正 2 の反例は結果を見る前に書けた。訂正 3 の加法性は走らせる前に分かった。C-6 の「検算の不等式を先に用意しておく」の重力版である。

C-10-7. 数え上げ

	件数
照合された章	第 II 部冒頭、第 5・6・17・35・36・37・58・60・82 章
撤回	**1**
判定変更	**3**
帰無結果の反転	**1**
表現限定	**2**
再計算した数値（K400–K402）	3
本書で新たに走らせた実験	0

第 IX 部は第 1 世代の「Einstein の残差は物理」（C-1 の 34 → 35）で一度撤回し、今回の 36-2 節で二度目である。**同じ部で二度撤回した。** どちらも「測った量は正しく、そこから読んだ推論が過剰だった」という形をしている。第 4 期で第 IX 部に戻るときは、C-10-6 の習慣を最初に置く。

C-11. 第 12 版の失敗 — 外れた予言四件、設計の失敗二件 🆕

第 86 章の宣言（P240–P259）に対する記録である。本文は §86-13。**撤回はない。**

C-11-1. 外れた予言（C-5 の「動力学・数え上げ」の側）

予言	内容	結果
P242（K416）	反転時の 1 ビットの乱れで戻らない	**外れ。** $T \ll L$ では戻る。閾値は誤り密度 $\sim 1/(vT)$
P243（K418）	線形規則の時間平均状態は 3.5 bit 以上	**部分外れ。** 局所シードと規則 90 で届かない
P244（K412）	保存量を持つ規則は少ない	**外れ。** 256 規則の約半数（$q=2$ で 117、$q=3$ で 124）
P259（K427）	Haar 状態の下限が $t \geq 1$ で正	**部分外れ。** $L=7$ では $t=1,\ m=3$ のみ

C-11-2. 設計の失敗

事項	内容	対処
P247（K413）	Planck のサンプル検定に検出力が無かった。対照でも差が出なかった	厳密計算 K414 に組み直した。**K414 は宣言なしで走らせた**（§86-13）
K415 の初回	Euler 環の辺が 6400 万本になって止まらなかった	ブロック長を下げて再実行

C-11-3. 草稿の段階で直した誤り（数え上げの外）

事項	誤り	修正
§86-5 の証明	アフィン性と上半連続性による略証に留まっていた	有限サイズの定理 86-1 に置き換えた。そちらの証明にはどちらも要らない
系 86-3	仕事の上限を s_0 で書いた。隠れた相関があると $s_0 < s^{\mathrm{TD}}(e_0)$ なので誤り	$s^{\mathrm{TD}}(e_0)$ に直した。Planck に戻るのは iMATE のときだけ
時間平均状態の下限	「$t = T-1$ の値で同じ下限」と書いた	各時刻の下限の平均以上、に直した
図 86-1	(b) に床の値を点として描き、(c) に実体のない棒を描いた	点と棒を除き、(b) には注記を置いた

C-11-4. 第 75 章の限定（本文の訂正枠）

§75-11（1　ビットの脆さは光円錐が系を覆う場合）、§75-13(a)・§75-14（線形規則の反例は局所シードについて）、§75-16（混合性の定義の候補）。測定値はそのまま正しく、変えたのは読み方である。

C-11-5. 数え上げ

	件数
較正（K408–K427）	20
落第または部分落第（K412, K413, K416, K418, K427）	**5**
うち予言の外れ	4
うち設計の失敗	1
較正に数えない設計の誤り（K415 初回）	1
撤回	0

今回も外れは動力学・数え上げ・有限サイズの見積もりの側にあり、定理は持ちこたえた。第 75 章と同じ非対称である。

C-12. 第 12 版への査読 — 撤回二件、数値の訂正一件、判定変更四件 🆕

第 12 版の本文に対する外部の査読報告（2026-11-06）の記録である。本文は第 87 章。

C-12-1. 撤回した結論（C-1 に追加、七件目と八件目）

撤回	内容	原因
第 36 章ほか	**「線形次数の Einstein の形が出る」**	**§85-2 の反例を二次にしか当てなかった。** 第 11 版の訂正が半分で止まっていた
第 75-7 節	**「$p \neq 2$ はどの有限 level にも属さない」**	**全称を偶数の p で試していなかった。** P36 の合格を取り消す

C-12-2. 数値を訂正した

事項	第 12 版	第 13 版	理由
Life のビット消去率	0.0955 bit/セル	像の大きさの量としては正しい。一様入力の損失は 0.2615	下限を損失と読んでいた

C-12-3. 判定を改めた（C-3 に追加、四件）

事項	第 12 版	第 13 版
第 3 章	運動学的な一般相対論を完全に再現	有効な因果構造
第 12 章	拘束が相互作用を強制する ✅	拘束と電場項の組 ⚠️
第 35 章	10^{61} 問題が消える ✅、$1/\pi$	桁の隔たりが消える ⚠️、比 4
第 75-6 節	正真正銘の level 3 の測度 ✅	非負とは限らない集合関数の族 ⚠️

C-12-4. 頻出した誤りのパターン（C-5 に追加）

誤り	検出のきっかけ
全称を特殊な値で試していない 🆕	p が偶数なら多項式だと紙で書けた
訂正を、見つけた箇所にしか当てない 🆕	二次に効く反例は、線形にも効いた
下限を値として読んだ 🆕	全列挙で一様入力の損失を実際に計算した
測定値の名前を強く付ける（「熱」「測度」「Hawking 温度」）	査読

C-12-5. 査読の側の誤り

最優先の指摘は $I_5 = 0.487$ を $p = 4$ の値と読んだ。本文の表では $p = 3.0$ の値である。節番号のずれの範囲も第 46〜56 章が正しい。ただし読み違いの先で、$p = 4$ についての論証そのものは正しく、本書の見出しは誤りだった。

C-12-6. 数え上げ

	件数
指摘	26
妥当	17
部分的に妥当	9
全面的な誤り	0
撤回	**2**
数値の訂正	**1**
判定変更	**4**
本書の検算（K428–K435、事前宣言なし）	8

付録 D　通奏低音 — 繰り返し現れた主題

通奏低音（basso continuo）はバロック音楽の用語で、曲の始めから終わりまで途切れず鳴り続ける低音声部を指す。

D-1.「良い基底を選べば構造が見える」が「良い基底を探すこと自体が難しい」

六度現れた — 再フェルミオン化、Clifford 軌道、単項／多項の分類、島の内と外、局所部分の切断、そして物理セクターへの射影。

D-2. 拘束が三度、別の役割で現れた

章	役割
第 12 章	**相互作用を担う**（拘束と電場項の組。§87-6）
第 37 章	**状態を間引く**（疎性の必要条件）
第 32 章	**結合定数を量子化する**（$U_q = 2h[1 - \cos(2\pi q/N)]$）

そして三度とも、拘束が**厳密に**言うのは「何が不可能か」だけだった（可換な bilinear は 0 個、$r = 1$ でのみ縮退、$\Delta_0 = 0$ でのみ平坦）。

D-3. ランダムネスが四度目の役割で現れる 💭

ランダムネスは Lorentz 不変性を買う。

規則的な離散性は慣性系を選んでしまう。ランダムな離散性はそれをしない。**そしてランダムな離散性は確率的な法則を自然に伴う。**

第 12 章では拘束が相互作用を生み、第 37 章では拘束が疎性を生み、第 32 章では拘束が結合を量子化し、第 XI 部ではランダムネスが対称性を生む。**いずれも「余計なもの」に見えたものが、実は必要だったという構造をしている。**

D-4. 同じ場所で三度飽和した 🆕

章	飽和する量	飽和点
第 27 章	束縛エネルギー、半径、慣性	$r \sim 32$
第 34 章	離調による保護	$r \sim 30$
第 27 章	換算質量	$r \to \infty$ で 2 倍

有限バンド幅の格子では、質量比は $r \sim 30$ で買えるものを買い尽くす。

D-5. 衝撃が立つと、冪という概念そのものが消える 🆕

第 79 章の caustic、第 80 章の $\max|\nabla f|_q < 1$、第 81 章の「実解が有限半径で消える」——三度、同じ形で現れた。**線形応答の窓の外では、指数を測ろうとすること自体が誤りである。**

冪が定義できるのは、応答が飽和していない間だけである。

D-6. 検証していない制約を制約として使ってはいけない 🆕

第 79 章以来「A_0 は層の厚さの数倍必要」と信じて作動点を縛ってきたが、第 80 章で測ったら **1.1 層でも残存率は落ちなかった**。三節ぶん、要らない制約の中で設計していた。

LIZARD LLC

D-7. 到達できる値が飛び飛びで、欲しい値が隙間にある 🆕

章	離散な集合	欲しかったのに無かった値
第 33 章	$I \geq 2$	$I = 1$
第 70 章	$s \in \{-1,\ 1/3,\ 3/5,\ 5/7, \ldots\}$	$s = 0$（平坦）
第 81 章	$s = (D-2)/N$、D は奇数	同上。空隙は $(-1,\ 1/3)$

三度とも、そこから**二分法**が生えた。**連続に見える自由度が実は離散である**というのが、本書で最も繰り返し現れた構造である。

D-8. 同じ場所で四度、形は出て係数は出なかった 🆕

第 60 章（面積則のスケーリングは出るが係数は出ない）、第 82 章（生成子の在り処は得たが大きさは得ていない）、第 83 章（方程式の形は対称性から自動で、係数は非普遍）、第 85 章（第一法則は形、canonical energy は係数）。**本書の ✅ は形についての ✅ であり、係数についての ✅ はまだ一つもない。** カシミール効果が最初から教えていた「差分は普遍、絶対値は非普遍」の、本書における四つの顔である。

> ⚠️ **限定（第 13 版）。** 「第一法則は形」は言いすぎだった。第一法則は幾何のない系でも成り立つ恒等式で、形の証拠にもならない（§87-2）。

参考文献

⚠️ 書誌情報は記憶に基づく記載であり、要確認。📚 は本探究で検証していないもの。

CA の基礎: Hedlund (1969); Toffoli & Margolus (1987); Kari (1994, 1996) 📚

CA 的宇宙論: 't Hooft (2016); Fredkin & Toffoli (1982); Zuse (1969)

QCA / quantum walk: Bialynicki-Birula (1994); Meyer (1996); D'Ariano & Perinotti (2014); Gross, Nesme, Vogts & Werner (2012) 📚; Freedman & Hastings (2020) 📚

代数的場の理論: Haag & Kastler (1964); Haag (1992); Bratteli & Robinson (1979, 1981); Araki (1971)

自由フェルミオンと可解性: Valiant (2002); Terhal & DiVincenzo (2002); Fendley (2019); Kitaev (2006)

カイラルフェルミオン: Nielsen & Ninomiya (1981); Kaplan (1992); Callan & Harvey (1985); Jackiw & Rebbi (1976)

RG と階層: Shankar (1994); Cooper (1956); Lieb & Wu (1968)

格子ゲージ理論・創発ゲージ場: Kogut & Susskind (1975); Fradkin & Shenker (1979); Kitaev (2003); Hermele, Fisher & Balents (2004); Levin & Wen (2005)

エンタングルメントと重力: Ryu & Takayanagi (2006); Casini, Huerta & Myers (2011); Lashkari, McDermott & Van Raamsdonk (2014); Faulkner et al. (2014); Swingle (2012); Almheiri, Dong & Harlow (2015)

modular Hamiltonian: Bisognano & Wichmann (1976); Peschel (2003); Eisler & Peschel (2017)

ホログラフィー: Bekenstein (1973); 't Hooft (1993); Susskind (1995); Maldacena (1998)

熱力学と情報: Landauer (1961); Bennett (1982); Bérut et al. (2012)

Bell の定理: Bell (1964); CHSH (1969); Cirel'son (1980); Fine (1982); Horodecki³ (1995); Hensen et al. (2015); Giustina et al. (2015); Shalm et al. (2015)

Lorentz 破れの自然さ: Collins, Perez, Sudarsky, Urrutia & Vucetich (2004); Kostelecký & Russell (2011)

因果集合: Bombelli, Lee, Meyer & Sorkin (1987); Rideout & Sorkin (1999); Sorkin (1991, 2007); Surya (2019)

客観的収縮: Ghirardi, Rimini & Weber (1986); Pearle (1989); Diósi (1989); Penrose (1996); Bassi et al. (2013); Tumulka (2006)

情報論的再構成: Hardy (2001); Chiribella, D'Ariano & Perinotti (2011); Masanes & Müller (2011)

Everett 解釈: Everett (1957); Deutsch (1999); Wallace (2012); Sebens & Carroll (2018)

Wolfram 物理: Wolfram (2002, 2020); Gorard (2020)

ドメインウォールと宇宙論: Zel'dovich, Kobzarev & Okun (1974) 📚; Starobinsky & Yokoyama (1994) 📚

干渉の階層と差分方程式: Fréchet (1909) 📚

第二法則と CA の統計力学: Chiba, Yoneta, Hamazaki & Shimizu (2026); Lanford & Robinson (1968) 📚; Mohari (arXiv:1705.11038, math/0701186) 📚; Shiraishi (2018) 📚 Takesue (1989) 📚 Kari & Taati (2015) 📚 Lazarides, Das & Moessner (2014) 📚 D'Alessio & Rigol (2014) 📚

改訂履歴

- **注記。** 各項の章番号は**その版の時点での番号**である。第 5 版で第 33 章を挿入したため、旧第 33 章以降は一つずつ繰り下がっている（旧第 68 章「結び」＝現第 88 章）。
- **13.0**（2026-11-06）第 XXIX 部「第 12 版への査読 — 二件の撤回と、縮めた断定」（第 87 章）、付録 A-8・C-12 を追加。外部の査読報告を検証し、**撤回 2 件（線形次数の Einstein、§75-7）、数値の訂正 1 件（第 15 章）、判定変更 4 件。K428–K435（事前宣言なし）。** 第 1〜6・8・9・12・13・15・17・20・24・35・36・69・75・81・85・86 章に訂正枠。第 46〜56 章の節番号を修正。配布物に `code/` を同梱。**結びは第 88 章。**
- **12.0**（2026-11-06）第 XXVIII 部「第二法則 — 量子論の定理は格子に載るか」（第 86 章）、付録 A-7・C-11 を追加。 **K408–K427、P240–P259、較正 20 件、落第または部分落第 5 件、撤回 0 件。** 定理 86-1（著者の導出、未査読、一様規則に限る）。第 14・40・75・83 章に追記または限定の枠。結びに第七の項目。**結びは第 87 章。**
- **11.0**（2026-09-13）第 6 章追補（§6-7 離散 Klein–Gordon 方程式、§6-8 訂正枠）、第 XXV 部「差分と絶対値」（第 83 章）、第 XXVI 部「重力はなぜ弱いか」（第 84 章）、第 XXVII 部「第 10 版への外部検証」（第 85 章）、付録 A-6・C-10・D-8 を追加。 **K400–K407。撤回 1 件（§36-2）、判定変更 3 件、帰無反転 1 件、表現限定 2 件。** 序-1・第 II 部冒頭・第 5・6-5・17-2・35・36-2・37 章に訂正枠。**結びは第 86 章。**
- **10.0**（2026-08-24）第 XIX–XXIV 部（第 74〜83 章）を追加。**K198–K399、延べ 217 件の較正、失敗 113 件。** 第 XIX 部（第 74 章）：CA の下方集合前進作用素は**厳密に可換**であり、GR の「計量に依って閉じる」中間には入れない。K160 の切片は灰体因子では説明できなかった。第 XX 部（第 75 章）：測度の階層と Loschmidt 反転の厳密検定。第 XXI 部（第 76 章）：**離散・厳密局所・Lorentz 不変は三つ同時には成り立たない**。規則性を捨てれば Lorentz は戻るが、局所性が対数的に壊れる。第 XXII 部（第 77〜80 章、本書最大の単一の問い）： **不規則な因果集合の上では変形代数が閉じる。** 閉じ方は q^{ab} に依り、非対角成分まで正しい形で返る（$\chi^2/\text{自由度} = 0.54$）。返らないのは振幅で、$R = 0.116 \pm 0.037$。第 XXIII 部（第 81 章）：第 70 章の逃げ道（非線形かつ高階の則）を閉じた。**平坦を止めているのはパリティである** — $\mathbf{F}$ はベクトルだから微分の総数 D は奇数、平坦は $D = 2$ を要求する。二分法は空隙 $(-1, 1/3)$ を持つ形に強まった。第 XXIV 部（第 82 章）：三つの欠落の判定と、方法に加わった三つ（下見・走らせる前の威力計算・模型の族の確認）。結びを第 83 章へ。図 22 枚（新章の 20 枚＋第 1・2 章の解説図 2 枚、日英とも）。
- **9.0**（2026-08-19）第 XVII 部「エンタングルメント — 相関はどこから来るのか」（第 72 章）を追加。Clifford CA の安定化群形式（整数演算）で、相関の必要条件が共通の過去であること（例外 0）、増加率が境界で決まり体積に依らないこと（1.0 対 0.5 ビット/層）、こちらの任意の局所操作が彼方の縮約状態を一切変えないこと（200/200）を測った。それでも CHSH は $2\sqrt{2}$、no-signalling は 5.6×10^{-17}。$I_3 = 0$、$I_2 \neq 0$。「彼方の状態」は葉層に依る（トレース距離 0.500）が相関は依らない — 収縮は記帳法である。較正 K185–K197、落第 2 件（宣言の誤りとゲート選択）。総括を第 XVIII 部・第 73 章へ、結びを第 74 章へ。図 1 枚。
- **8.0**（2026-08-18）第 XVI 部「同時とは何か」（第 71 章）を追加。CA の一斉更新が因果的に何を意味するかを測った。再葉層化不変性は 2720 通りで不一致 0。支えるのは「規則が親しか見ない」ことだけで、光円錐を超えると 300/300 破れる。± 1 の光円錐では全セルを覆う反鎖は平坦なものだけ（総当たりで確認）、一方 sprinkling なら傾けられる — 「今」を固定しているのは離散性ではなく規則性である。「今」は厚い層である（中央値 3 段）。較正 K173–K184、落第 1 件（私の検定コードのバグ）。総括を第 XVII 部・第 72 章へ、結びを第 73 章へ。図 1 枚。
- **7.0**（2026-08-18）第 XV 部「銀河の回転曲線 — ダークマターは仮定しなければならないか」（第 70 章）を追加。局所フラックスが解析的なら v^2 の漸近べきは $\{-1, 1/3, 3/5, \ldots\}$ しか取れず、平坦はその隙間にあることを示した。平坦は $m = 1/2$ を一意に要求し、それは非解析である。格子の Green 関数の補正は $\frac{5}{8} K_4 / r^2$ で球面平均ゼロ。バリオン Tully–Fisher の指数 4（実測 3.85 ± 0.09、1.67σ）。較正 K162–K172、落第 3 件（うち 1 件は符号バグ）。総括を第 XVI 部・第 71 章へ、結びを第 72 章へ。図 1 枚。
- **6.0**（2026-08-15）第 XIV 部「地平線 — 音響ブラックホールと Hawking 輻射」（第 69 章）を追加。位置依存の局所規則に流れを入れて音響地平線を作り、輻射が熱的であること、温度が $\kappa/2\pi$ であること、$|\beta|^2$ が Planck 分布そのものであることを測った。格子は trans-Planckian 問題を持たない。較正 K149–K161、落第 4 件（うち 3 件は予言の外れ）。総括を第 XV 部・第 70 章へ、結びを第 71 章へ。図 1 枚とアニメーション 1 本（日英とも）。
- **5.0**（2026-08-14）第 33 章「隠れた次元 — 四面体・ダイヤモンド・超格子」を第 VIII 部に追加。これまで §32-5 の訂正枠が結論だけを引用していた機構を、本文として展開した。第 XIV 部「現実の宇宙はどう見えるか」（第 69 章）を追加し、Lorentz 不変性・Bell・因果律・質量について到達点を総括した。結びは第 70 章。図 2 枚を新規に配置（日英とも）。
- **4.0**（2026-08-14）第 XIII 部を追加（第 57〜67 章）。Einstein 方程式と標準模型の導出可能性、因果集合の modular Hamiltonian・第一法則・Ryu–Takayanagi、逐次成長の古典・量子、公理検定、Benincasa–Dowker 作用の逆向き検定、全体規格化、Wick 回転。第 6 章に追補（6-2〜6-6、ドブロイ波）。結びを第 68 章に移した。 **全 69 章に説明的な副題を付け**、第 0 章にセルオートマトン（cellular automaton）の正式な呼び名と由来を追加した。図 11 枚を新規に配置（日英とも）。
- **3.0**（2026-08-13）第 XII 部を追加（第 45〜56 章）。収縮を物理にする — 因果集合から実験提案まで。結びを第 57 章として巻末に移し、第 0 章を新設した。§32-5 を訂正（1.18517 ではなく $32/27$）。撤回 1 件（§55-5）と校正落第 8 件を付録 C-8 に記録。

版	日付	内容
—	2026-08-06〜07	第 1 世代『LIFE GAME が描く宇宙』第 1.0〜6.0 版（四十一実験）
1.0	2026-08-09	モノグラフ第 1 版。体系順に再構成。熱力学・Bell・電磁気学・Lorentz を新規計算
2.0	2026-08-10	学習順に全面再構成。代数的定式化（第 2 章）、Bell の帰属訂正（第 20 章）、質量比の全面展開（第 VIII 部：濾過・生成・淘汰・地平線・剛性・保護）を追加。図 51 枚を配置
3.0	2026-08-13	第 XII 部（第 45〜56 章）。結びを巻末へ、第 0 章を新設
4.0	2026-08-14	第 XIII 部（第 57〜67 章）と第 6 章追補。全章に副題。第 0 章に正式名称。図 78 枚
5.0	2026-08-14	第 33 章（隠れた次元）と第 XIV 部（総括）。結びは第 70 章。図 80 枚
6.0	2026-08-15	第 XIV 部（音響地平線と Hawking 輻射、第 69 章）。結びは第 71 章。図 81 枚＋動画 1 本
7.0	2026-08-18	第 XV 部（銀河の回転曲線、第 70 章）。結びは第 72 章。図 82 枚＋動画 1 本
8.0	2026-08-18	第 XVI 部（同時とは何か、第 71 章）。結びは第 73 章。図 83 枚＋動画 1 本
9.0	2026-08-19	第 XVII 部（エンタングルメント、第 72 章）。結びは第 74 章。図 84 枚＋動画 1 本
10.0	2026-08-24	第 XIX–XXIV 部（第 74〜83 章）。K198–K399。結びは第 83 章。図 108 枚＋動画 1 本
11.0	2026-09-13	第 6 章追補、第 XXV–XXVII 部（第 83〜85 章）、付録 A-6・C-10・D-8。K400–K407。撤回 1 件。結びは第 86 章。図 108 枚＋動画 1 本
12.0	2026-11-06	第 XXVIII 部（第二法則、第 86 章）、付録 A-7・C-11。K408–K427。撤回 0 件。結びは第 87 章。`figures/` は 109 ファイル（PNG 107 枚と動画の gif・mp4）
13.0	**2026-11-06**	**第 XXIX 部（第 12 版への査読、第 87 章）、付録 A-8・C-12。K428–K435。撤回 2 件。結びは第 88 章。`figures/` は 109 ファイル、`code/` を同梱**

LIZARD LLC

付属物

ファイル	内容
`code/chain.py`, `j_transport.py`, `manifold.py`	第 1 世代の共分散形式ライブラリ
`code/thermo.py`	Life・ECA の全状態列挙、粗視／微視エントロピー、Floquet 準エネルギー
`code/chsh.py`, `chsh2.py`, `chsh3.py`	CHSH 観測量、Wick 相関、局所フレーム最適化、Ising 鎖
`code/maxwell.py`	格子 Bianchi 恒等式、分散関係、$\mathbb{Z}_N$ 電荷
`code/massratio.py`	格子二体問題、B 項、質量比の走査
`code/wall3.py`	有効ポテンシャル、緩和キンク、三設定の走行
`code/sector2.py`	$\mathbb{Z}_2$ ゲージ二種模型、物理セクター射影、保存量探索
`code/rigidity.py`	拘束付き Peierls 模型、Type I 剛性検定
`code/ladder.py`	$U_q(N)$ の検証、Type II 梯子、剛な不変量
`figures/`	109 ファイル（第 1 世代 44 ＋ 第 2〜9 版 42 ＋ 第 10 版 22 ＋ 第 12 版 1）。束には**一式すべて**入っている
`code/` 第 10 版分	変形代数（因果集合・連続 ADM 流・viscosity 解）、疎リンク表現、傾いた光円錐、高階フラックス則の動径ソルバ。すべて `*_bundle.tar.gz` に較正付きで同梱
`secondlaw_bundle.tar.gz`	第 86 章の計算（`sl_run1` 〜 `sl_run6`、ログ、宣言、作図）。較正付き
`code/bundles/`	各 `*_bundle.tar.gz` のコード、ログ、宣言、結果文書。第 13 版から配布物に同梱
`code/v11/`	第 11 版の検算スクリプト（K403–K407）と草稿
`code/peer_review/`	第 87 章の検算（`pr_check.py`）、査読報告とその検証

コードと宣言は同梱した。K100 以降の 279 番号のうち 273 は束の文書に、K401–K406 は第 11 版の草稿（`code/v11/`）に現れるが、これは記載の確認である。K400–K402 の再計算のスクリプトは見つけられなかった。第 13 版で再実行を確かめたのは K220–K223 と第 87 章の検算だけである。数値が信じられなければ、まず較正部分を走らせること。

規則は、ただ回り続ける。しかし、どちらへ回るかは決まっていない。